

UDC 512.312

Mathematical Model of Suspension Filtration and Its Analytical Solution

¹Normahmad Ravshanov²Bozorboy Palvanov³Yuldash Islamov

¹The Centre on development of the programme products and hardware - programme complex under TUIT, Uzbekistan

100125, Tashkent, str. Durmon yuli 25

Dr. (Technical)

E-mail: ravshanzade-09@mail.ru

²The Centre on development of the programme products and hardware – programme complex under TUIT, 100125, Uzbekistan, Tashkent, str. Durmon yuli 25

Junior research scientist

E-mail: bozorboy@yandex.ru

³The Tashkent Pediatric Medical Institute, Uzbekistan

Tashkent, Bogishamol St. 223.

Abstract. The work develops advanced mathematical model and computing algorithm to analyze, predict and identify the basic parameters of filter units and their variation ranges. Numerical analytic solution of liquid ionized mixtures filtration was got on their basis. Computing experiments results are presented in graphics form. Calculation results analysis enables to determine the optimum performance of filter units, used for liquid ionized mixtures filtration, food preparation, drug production and water purification. Selection of the most suitable parameters contributes to the improvement of economic and technological efficiency of production and filter units working efficiency.

Keywords: Mathematical model; computing experiment; concentration; filtration; filter membrane; gel-particles; analytical solution.

Введение. Для производства и подготовки продуктов и сырья процесс фильтрования играет особую роль в технологическом цикле. Экономическая и технологическая эффективность этих процессов непосредственно связана с выбором технологических показаний фильтрующих агрегатов, исходя из физико-механических и химических свойств составляющих смесей.

В процессе переработки и фильтрования жидкостей используются различные фильтры и фильтровальные перегородки. Неправильный выбор режима работы фильтрующих агрегатов и технологических режимов приводит к значительным потерям ценного сырья, снижению производительности и качества получаемого выходного продукта. Работоспособность агрегатов определяется состоянием фильтрующих перегородок, с помощью которых отделяются частицы твердой фазы от жидкости или адсорбируются от нежелательных ионов. Качество выходного продукта и сырья при технологическом процессе (ТП) фильтрования зависит от устойчивости фильтрующих сводов по отношению к образовавшемуся давлению внутри фильтровальной колонки.

Один из эффективных методов для исследования, прогнозирования, управления и синтеза основных параметров и их диапазонов изменения, а также изменения состояния объекта – математическое моделирование процесса и проведения вычислительного эксперимента на ЭВМ.

Проблемой ММ НТПФС занимаются многие ученые и созданы школы, которые эффективно работают под руководством Ю.М. Шехтмана, И.И. Жужикова, И.М. Федоткина, Р.И. Нигматулина, С.И. Криль, а также немецких ученых В. Кохха, У.К. Циммермана, Ф.Б. Абуталиева, М.Н. Юсупбекова, М.Я. Рахимова и других.

Анализ научно-исследовательских работ и литературных источников по проблеме математического моделирования нестационарных технологических процессов фильтрования смесей (НТПФС) за последние 10–15 лет показал, что получены значительные

теоретические и практические результаты. Из полученных результатов видно, что на НТПФС воздействует множество параметров с удельными весами. Поэтому целью исследования является всестороннее изучение данного процесса с учетом дополнительных факторов и возмущений, действующих на объект с помощью математического моделирования (ММ) и вычислительных экспериментов (ВЭ).

Материалы и методы. Рассматривается линейная задача фильтрации жидкости с взвешенными гель-частицами через фильтровальную перегородку фильтра. Допустим, что перемещение суспензии происходит под действием постоянного перепада давления в колонке фильтровального агрегата при переменном во времени расходе жидкости $Q = Q(t)$. При этом предполагается, что пористость фильтровальной перегородки и суспензия таковы, что в процессе фильтрования гель-частицы задерживаются пористой средой, часть ранее осевших срывается и попадает в фильтрационный поток и часть проносится фильтрационным потоком дальше.

Рассмотрим единицу объема порового пространства в процессе фильтрации смеси. Если насыщенность порового пространства равна ρ , то его насыщенность твердым веществом или гель-частицами будет $1 - \rho$, а насыщенность порового пространства осевшей массой равна β , а насыщенность взвешенными частицами $-\alpha$. Насыщенность порового пространства осевшими частицами в рыхлом теле обозначена через ξ . Через ζ обозначена насыщенность порового пространства «свободной» жидкостью, связанной с осевшей массой, через $\varepsilon\xi$ (ε - пористость осевшей массой – принимается постоянной). Из этих определений следует, что [1]:

$$\rho + \alpha + \beta = 1 \text{ и } \xi + \delta + \alpha \neq \dots, (1)$$

$$\beta = \delta - \varepsilon\delta = \delta(1 - \varepsilon) \text{ и } \delta = \frac{\beta}{1 - \varepsilon}, (2)$$

$$\rho = 1 - \alpha - (1 - \varepsilon)\delta \quad \rho = \xi + \varepsilon\delta. (3)$$

Исходя из (1)-(3) концентрация взвешенного твердого вещества в движущейся смеси определяется следующим образом:

$$\theta = \frac{\alpha}{\alpha + \xi} \text{ или } \theta = \frac{\alpha}{1 - \delta}. (4)$$

Если m - пористость фильтра в процессе фильтрации смеси, а m_0 - его первоначальная пористость, то количество жидкости в единице объема пористой среды вычисляется с помощью формулы

$$m = m_0\rho. (5)$$

Для вывода уравнения фильтрации смеси предполагаем, что в процессе движения смеси жидкости с взвешенными твердыми частицами часть твердого вещества находится в порах фильтра в покое, часть - во взвешенном состоянии и движется совместно с жидкостью.

Итак, задача формулируется следующим образом: через пористую среду течет жидкость, содержащая взвешенные твердые частицы. Требуется определить изменение объемной концентрации и насыщенность порового пространства фильтра.

Используя зависимости (1)-(5), можно получить уравнение баланса вещества в виде [1]:

$$q(t) \frac{\partial \theta}{\partial x} = -m_0(1 - \varepsilon) \frac{\partial \delta}{\partial t} - m_0 \frac{\partial \alpha}{\partial t}. (6)$$

Зависимость между равновесием объемной концентрации и насыщенностью порового пространства мелкими частицами в процессе фильтрования описывается формулой

$$\delta = \delta_0 \frac{\delta^*}{a_0 + \delta^*}, (7)$$

где δ_0 - максимальная насыщенность порового пространства мелкими частицами к концу процесса кольтматации или к началу процесса диффузии; a_0 - опытный коэффициент,

зависящий от соотношения диаметров частиц скелета и взвеси, от размеров и формы пор фильтра.

При малых значениях δ^* по сравнению с a_0 вместо равенства (7) получаем

$$\delta = \frac{1}{\gamma} \theta^*, \quad \gamma = \frac{a_0}{\theta_0}. \quad (8)$$

При фильтрации жидкости, содержащей взвешенные твердые частицы, коэффициент γ сильно зависит от величины и состояния поверхности поровых каналов фильтра.

При $\theta = \theta^*$ не будет происходить ни коагуляции, ни суффозии, процесс будет находиться в равновесном состоянии:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \lambda(\theta - \delta), \quad (9)$$

где λ - кинетический коэффициент или константная скорость осаждения частиц в порах фильтра.

Таким образом, для определения функций δ и ζ следует решать систему (6), (9) с соответствующими краевыми условиями.

Из уравнения (6) при $m = const$ получаем [3-4]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{W}{m} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (1 - m_0) \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Здесь W - скорость прохода жидкости через фильтровальную перегородку.

Если учесть, что часть взвешенных гель-частиц проходит через фильтровальную перегородку, то выражение (4) можно записать в следующем виде:

$$\theta - \theta_3 = \frac{\alpha}{1 - \delta}. \quad (11)$$

Выходная концентрация смеси, проходящей через фильтровальную перегородку θ_3 , определяется по уравнению неразрывности масс:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + W \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Количество частиц, проходящих через фильтровальную перегородку, вычисляется путем интегрирования уравнения (12) по всей области фильтрования [5-8]:

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \frac{1 - \bar{\theta}}{2 - \bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dt} + \frac{1}{2 - \delta} \left[\lambda(\bar{\theta} - \gamma\bar{\delta})(1 - \bar{\theta}) - \frac{\theta_1 W_0}{H_0(1 - \theta_1)} \right] + \theta_3 \left[\lambda(\bar{\theta} - \gamma\bar{\delta}) + \frac{W_0}{H_0(1 - \theta_0)} \right] \frac{1}{2 - \delta},$$

(13)

$$\text{где } \bar{\delta}(t) = \int_0^1 \delta(x, t) dx; \quad \bar{\theta}(t) = \int_0^1 \theta(x, t) dx.$$

Для задания начальных и граничных условий рассмотрим процесс фильтрования суспензии с того момента времени, когда поровые пространства заполнились смесью, т.е. за начальный момент примем тот момент времени $t = t_1$, когда смесь вытеснит из порового пространства фильтра чистую воду и достигнет второй границы фильтра ($x = H_0$). Начальным распределением концентрации $\theta(x, t)$ будет распределение, образовавшееся на поверхности фильтра к моменту времени $t_1 = H_0 / W_0$.

Следует указать, что время t_1 весьма мало по сравнению с общей продолжительностью процесса фильтрования. Поэтому можно считать насыщенность порового пространства осевшими частицами δ весьма малой по сравнению с единицей в период времени $t < t_1$ и

полагать, что истинная скорость движения в тот же период времени будет постоянной величиной и равной W_0 .

Из равенства (3) видно, что при $\delta \ll 1$ в соотношении (4) можно принять $\theta = \alpha$.

Примем, что скорость выпадения твердых взвешенных частиц при движении смеси за указанный период времени пропорциональна количеству частиц α :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\chi \alpha \text{ или } \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\chi \theta, \quad (14)$$

где χ – коэффициент пропорциональности.

Интегрируя уравнение (14) и пользуясь начальным условием $\theta = \theta_0$ в точке $x = 0$ при $t = 0$, получаем

$$\theta = \theta_0 e^{-\chi t} \text{ или } \theta = \theta_0 e^{-\frac{\chi x}{W_0}}. \quad (15)$$

Для начального распределения объемной концентрации в выражении (15) примем $\chi = A(1 - \varepsilon)$. Так как $W_0 = Q_0 / m_0$, а $m(1 - \varepsilon) / Q_0 = B$, согласно равенству (6), то уравнение (15) представим в виде

$$\theta = \theta_0 e^{-ABx}. \quad (16)$$

При численном интегрировании уравнения (10) с соответствующими краевыми условиями из-за гиперболичности уравнения возникает мелкомасштабное колебание, с течением времени амплитуда которой увеличивается. Чтобы избежать такого нежелательного явления, в уравнение (10) введем искусственную вязкость вида $\mu_0 \frac{\partial \omega}{\partial x}$, где

ω можно брать как $\omega = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ или $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$, которую называют вязкостью Неймана [1, 2, 6].

В качестве μ_0 можно взять $\mu_0 = (1 \div 2) \cdot h^2$, h – шаг интегрирования уравнения по пространственной переменной.

Таким образом, если в (10) ввести искусственную вязкость, то оно станет параболическим уравнением и для его интегрирования требуется дополнительное условие при $x = l$. Это условие можно получить многими способами.

Предлагаем следующий метод определения условия при $x = l$. Уравнение

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial t} + A_1 B \frac{\partial \delta}{\partial t} + A_2 \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

при условиях

$$\theta(x, 0) = 0 \text{ и } \theta(0, t) = \frac{A_1}{A_2} \theta_0 \cdot (1 - e^{-A_2 t}) \quad (18)$$

решается операционным методом с применением трансформации Лапласа. Получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} \left[\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial t} + A_1 B \frac{\partial \delta}{\partial t} + A_2 \frac{\partial \delta}{\partial t} \right] dt = 0. \quad (19)$$

Производя по членное интегрирование уравнения (19), выразим все интегралы в левой части через интеграл $\int_0^{\infty} e^{-Pt} \xi dt$, зависящий от переменных x и P .

I. Третий член

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{\partial \delta}{\partial x} dt = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-Pt} \delta dt. \quad (20)$$

II. Второй член - интеграл $\int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{\partial \delta}{\partial t}$ берем по частям $u = e^{-Pt}$; $dv = \frac{\partial \delta}{\partial t} dt$, тогда

$du = -Pe^{-Pt} dt$, $v = \delta$ и искомый интеграл запишется в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{\partial \delta}{\partial t} dt = \delta e^{-Pt} \Big|_0^{\infty} + P \int_0^{\infty} e^{-Pt} \delta dt . \quad (21)$$

III. Первый член

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial t} dt = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{\partial \delta}{\partial t} dt . \quad (22)$$

Поскольку величина δ изменяется в пределах $0 \leq \delta \leq 1$ при $0 \leq t \leq \infty$, то величина δe^{-Pt} в равенстве (21) будет стремиться к нулю как при $t \rightarrow \infty$:

$$\delta e^{-Pt} \Big|_0^{\infty} = 0 . \quad (23)$$

Обозначим

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} \delta(t, x) dt = \bar{\delta}(x, p) . \quad (24)$$

Решая совместно уравнения (19)-(23) и учитывая равенства (24), получаем

$$P \bar{\delta}'_x(x, p) + A_1 B P \bar{\delta}_x(x, p) + A_2 \bar{\delta}'_x(x, p) = 0 \quad (25)$$

или

$$(P + A_2) \bar{\delta}'_x(x, p) + A_1 B P \bar{\delta}_x(x, p) = 0 . \quad (26)$$

Уравнение (26) и есть вспомогательное уравнение, в котором $\bar{\delta}(x, p)$ является искомой функцией, x – независимым переменным и P – параметром.

Преобразуем начальные условия и из уравнения (18) имеем

$$\delta(t, 0) = \frac{A_1 \theta_0}{A_2} (1 - e^{-A_2 t})$$

Следовательно,

$$\bar{\delta}(0, P) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} \theta(t, 0) dt = \int_0^{\infty} e^{-Pt} \frac{A_1 \theta_0}{A_2} (1 - e^{-A_2 t}) dt = -\frac{A_1 \theta_0}{P(P + A_2)} . \quad (27)$$

Интегрируем уравнение (26) при условии (27) разделением переменных:

$$\frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \delta} + \frac{A_1 B P}{P + A_2} dx = 0, \quad \ln \bar{\delta} = -\frac{A_1 B P}{P + A_2} x + \ln c, \quad \bar{\delta}(x, p) = c \cdot e^{-\frac{A_1 B P}{P + A_2} x} . \quad (28)$$

Из условия (27) и уравнения (28) имеем

$$c = \bar{\delta}(0, P) = -\frac{A_1 \delta_0}{P(P + A_2)} . \quad (29)$$

Следовательно,

$$\bar{\delta}(x, p) = -\frac{A_1 \delta_0}{P(P + A_2)} e^{-\frac{A_1 B P}{P + A_2} x} . \quad (30)$$

Из уравнения (29) и (24) получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} \delta(t, x) dx = -\frac{A_1 \delta_0}{P(P + A_2)} e^{-\frac{A_1 B P}{P + A_2} x} . \quad (31)$$

Уравнения (30) и (31) являются решением вспомогательного уравнения (26).

По найденному решению (31) ищем, как было указано выше, решение заданного уравнения (27) либо с помощью таблиц формул операционного исчисления, либо с помощью теоремы обращения и с применением теории вычетов.

Для решения уравнения (17) с помощью имеющихся таблиц формул операционного исчисления преобразуется показатель степени в правой части уравнения (31) следующим образом:

$$-\frac{A_1BP}{P+A_2}x = -A_1Bx \frac{(P+A_2)-A_2}{P+A_2} = -A_1Bx + \frac{A_1A_2Bx}{P+A_2},$$

$$\int_0^\infty e^{-Pt} \delta(t,x) dt = \frac{A_1\theta_0 e^{-A_1Bx}}{P(P+A_2)} e^{\frac{\alpha}{P+A_2}}. \quad (32)$$

Здесь

$$\alpha = A_1A_2Bx > 0 \quad \text{при } x > 0. \quad (33)$$

Воспользуемся известным соотношением

$$e^{\frac{\alpha}{P}} = P \int_0^\infty e^{-Pt} I_0(2\sqrt{\alpha t}) dt. \quad (34)$$

Общая формула имеет вид

$$F(P) = P \int_0^\infty \varphi(t) e^{-Pt} dt. \quad (35)$$

Заменяя в уравнении (34) P на $P+A_2$, получаем

$$e^{\frac{\alpha}{P+A_2}} = (P+A_2) \int_0^\infty e^{-(P+A_2)t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) dt \quad \frac{P}{P+A_2} (2e^{\frac{\alpha}{P+A_2}}) = P \int_0^\infty e^{-Pt} e^{-A_2t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) dt. \quad (36)$$

Умножим обе части уравнения (36) на P . Тогда получаем

$$\frac{P}{P+A_2} e^{\frac{\alpha}{P+A_2}} = P \int_0^\infty e^{-Pt} e^{-A_2t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) dt. \quad (37)$$

Преобразуем (33) к виду

$$\frac{P}{P+A_2} e^{\frac{\alpha}{P+A_2}} = P \int_0^\infty e^{-P} \frac{e^{A_1Bx}}{A_1\theta_0} \delta(t,x) dx. \quad (38)$$

Введем обозначения $\frac{\alpha}{P+A_2}$ и получаем

$$F_1(P) = \frac{1}{P+A_2} e^{\frac{\alpha}{P+A_2}}, \quad \varphi_1(t) = \frac{e^{A_1Bx}}{A_1\theta_0} \delta(t,x), \quad (39)$$

$$F_2(P) = \frac{P}{P+A_2} e^{\frac{\alpha}{P+A_2}}, \quad \varphi_2(t) = e^{-A_2t} I_0(2\sqrt{\alpha t}). \quad (40)$$

Из выше полученных формул имеем

$$F_1(P) = \frac{1}{P} F_2(P). \quad (41)$$

Функции φ_1 и φ_2 связаны соотношением

$$\varphi_1(t) = \int_0^\infty \varphi_2(\tau) d\tau. \quad (42)$$

Заменяя в равенстве (42) φ_1 и φ_2 их выражениями (39) и (40), получаем

$$\frac{e^{A_1 Bx}}{A_1 \delta_0} \delta(t, x) = \int_0^t e^{-A_2 \tau} I_0(2\sqrt{\alpha \tau}) d\tau,$$

откуда

$$\delta(t, x) = A_1 \theta_0 e^{-A_1 Bx} \int_0^t e^{-A_2 \tau} I_0(2\sqrt{\alpha \tau}) d\tau. \quad (43)$$

Для вычисления значения на границе $x = \ell$ используется библиотечная программа.

Обсуждение результатов и выводы. По полученному аналитическому решению задачи проведены расчеты на ЭВМ (рис. 1, 2).

Согласно проведенным расчетам на ЭВМ (рис. 1), изменение концентрации смеси зависит от пористости фильтровальной колонки, фильтра и времени фильтрования суспензии. Максимальное осаждение гель-частиц в начальной стадии процесса фильтрования смесей происходит в верхних слоях перегородки фильтра (рис. 2).

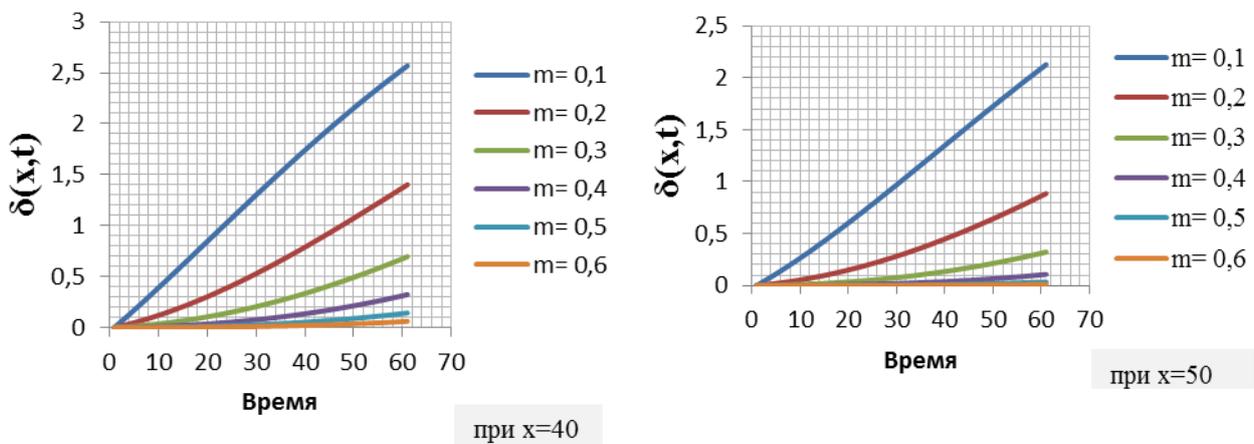


Рис. 1. Изменение концентрация смеси со временем по толщине пор фильтровальной перегородки в зависимости от пористости фильтра

С истечением процесса фильтрования смесей гель-частицами заполняются нижние слои фильтра. Рост концентрации гель-частиц со временем, как видно по кривым рис. 1, подчиняется линейному закону.

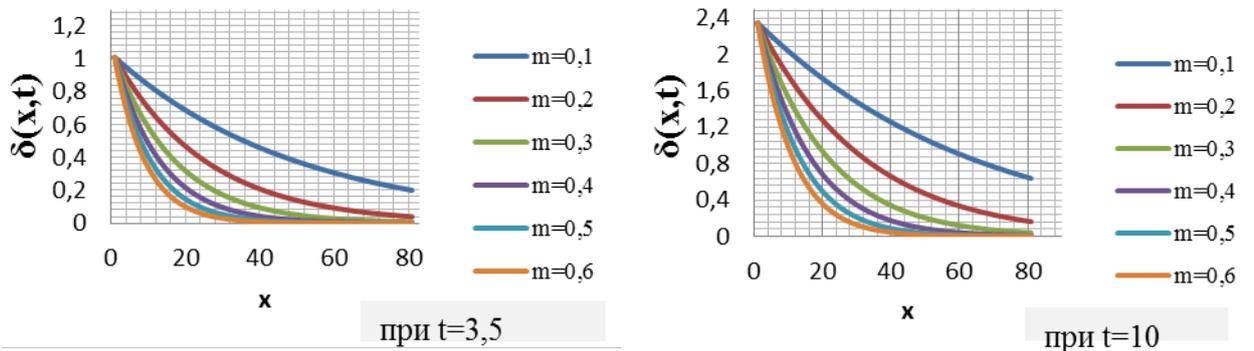


Рис. 2. Изменение концентрации смеси по длине в порах фильтровальной перегородки в зависимости от пористости фильтра

При коэффициенте пористости $m \geq 0.5$ происходит проскакивание частиц через фильтровальную перегородку, вследствие чего степень очищения суспензии от гель-частиц снижается. Таким образом, пористость и толщины фильтровальной перегородки фильтра необходимо подбирать в зависимости от диаметра гель-частиц в исходном растворе.

Таким образом, полученное аналитическое решение модельной задачи можно использовать для доказательства адекватности разрабатываемых математических моделей процесса фильтрования смесей, а также для подбора технических параметров фильтровальных агрегатов, используемых в технологии фильтрования и очищения различных смесей и жидких растворов.

Примечания:

1. Шехтман Ю.М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Изд. АН СССР, 1961. 213 с.
2. Ravshanov N., Palvanov B., Ravshanov Z. Computer model and computing experiment for technological process of multicomponent mixtures filtering study // European researcher. 2012. Vol. 19. № 4. Pp. 358–362.
3. Ravshanov N., Shermatova G.U. Computational experiment for the analysis of functioning of technological process of filtering of suspension // European researcher. 2012. № 2. Pp. 114–119.
4. Brouyere S., Modeling the migration of contaminants through variably saturated dual-porosity, dual-permeability chalk. Journal of Contaminant Hydrology, 82, Issues 3-4, 2006. P. 195-219.
5. Cussler E.L. Diffusion mass transfer in fluid systems. Cambridge University Press, 1997.
6. Selim H.M., Buchter B., C.Hinz and L.Ma. Modeling the transport and retention of cadmium in soils: Multireaction and multicomponent approaches. Soil Sci. Soc. Am. Proc., 56 (4), 1992. Pp. 1004-1015.
7. Абуталиев Ф.Б., Рахимов М. Об уравнениях ионообменного фильтрования и методы их решения на ЭВМ: Сб. научн. тр. Ташкент: ИК АН РУз, 1976. Вып. 40. С. 144-152.
8. Федоткин И.М., Криль С.И. Разделение суспензии и гиперфильтрование. Киев: Техника, 1972. 233 с.

УДК 512.312

**Математическая модель процесса фильтрования
суспензии и ее аналитическое решение**

¹ Нормакмад Равшанов

² Бозорбой Палванов

³ Юлдаш Нугманович Исламов

¹ Центр разработки программных продуктов и аппаратно – программных комплексов при ТУИТ, 100125, Республика Узбекистан г. Ташкента, ул. Дурмон йули 25
Доктор технических наук, заведующий лабораторией,
E-mail: ravshanzade-09@mail.ru

² Центр разработки программных продуктов и аппаратно – программных комплексов при ТУИТ, 100125, Республика Узбекистан г. Ташкента, ул. Дурмон йули 25
Младший научный сотрудник,
E-mail: bpolvonov@rambler.ru

Аннотация. В работе для анализа, прогнозирования и определения основных параметров работы фильтровальных агрегатов и их диапазонов изменения разработаны усовершенствованная математическая модель и вычислительный алгоритм. На их основе, получено численно-аналитическое решение задачи фильтрования жидких ионизированных растворов. Проведены вычислительные эксперименты на ЭМВ, результаты которых представлены в графическом виде. Анализ результатов расчёта позволяет определять оптимальные режимы работы фильтрующих агрегатов, использующихся в технологии фильтрования жидких ионизированных растворов, при приготовлении продуктов питания, фармацевтической продукции, а также для очищения питьевой воды. Выбор наиболее подходящих параметров, в свою очередь, способствует повышению экономической и технологической эффективности производственных процессов, а также работоспособности фильтровальных агрегатов.

Ключевые слова: математическая модель; вычислительный эксперимент; концентрация; фильтрование; фильтровальной перегородки; гель-частиц; аналитические решение.