UDC 519.175.4

Limit Distributions of the Edge Number in Random Configuration Graph *

[1] Yury L. Pavlov
[2] Elena V. Feklistova

[1] Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of RAS, Russia
11 Pushkinskaya str., Petrozavodsk, 185910
Dr. (Physical and Mathematical), Professor
E-mail: pavlov@krc.karelia.ru
[2] Petrozavodsk State University, Russia
33 Lenin pr., Petrozavodsk, 185910
Research Assistant
E-mail: f_len@mail.ru

Abstract. We consider a random graph constructing by the configuration model with random vertex degrees are drawn independently from power-law distribution. As the number of vertices tends to infinity we obtain the complete description of the local limit behavior of the number of edges.

Keywords: random graph; configuration model; vertex degree; number of edges; local limit theorems.

Введение. В последние годы появилось много работ, посвященных случайным графам, моделирующим сложные сети коммуникаций, такие как Интернет, системы мобильной связи, социальные сети и т. д. (см., например, [1 – 3]). Широкое распространение в этих исследованиях получили так называемые конфигурационные модели графов со случайными степенями вершин. Мы рассмотрим одну из таких моделей, которая, как показано в [1, 2], достаточно хорошо описывает структуру и динамику развития реальных сетей.

Пусть граф содержит N вершин, занумерованных числами от 1 до N. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ такими, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i \geq k\} = k^{-\tau}, \tag{1}$$

где $i = 1,..., N, k = 1,2,..., \tau -$ положительный параметр. Обозначим $\eta_N = \xi_1 + ... + \xi_N$. Поскольку сумма степеней графа должна быть четной, в случай нечетного значения η_N в граф вводится дополнительная вспомогательная вершина единичной степени. Построение графа происходит в два этапа. На первом этапе с помощью распределения (1) определяются степени всех вершин, при этом считается, что из вершин выходят так называемые «полуребра», т. е. ребра, для которых смежная вершина еще не определена. Все полуребра графа считаются различимыми. На втором этапе полуребра равновероятно и попарно соединяются друг с другом для образования ребер.

Поскольку современные сети коммуникаций содержат очень большое число узлов (число пользователей сети Интернет, например, исчисляется миллиардами), в большинстве исследований рассматривается асимптотическое поведение соответствующих случайных графов при стремящемся к бесконечности числе вершин. Очевидно, что свойства графов существенно зависят не только от числа вершин, но и от числа ребер. Ясно, что число ребер рассматриваемого графа является случайной величиной и равно $\eta_N / 2$ или $(\eta_N + 1)/2$ в зависимости от того, является ли сумма η_N четной или нечетной соответственно. Таким образом, изучение предельного поведения числа ребер графа эквивалентно исследованию

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00009) и Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета.

асимптотики η_N. В некоторых статьях (см. [2, 4, 5]) приведены результаты о поведении η_N при $N \to \infty$, однако они носят неполный и разрозненный характер. Так, например, в [2] показано, что при $\tau \in (1,2)$ и любом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\eta_N \in [(\zeta(\tau)-\varepsilon)N, (\zeta(\tau)+\varepsilon)N]\} \to 1,$$

где

$$\zeta(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau} \qquad (2)$$

- значение дзета-функции Римана в точке τ. Подробное исследование асимптотического поведения числа ребер оказалось весьма полезным при изучении особенностей структуры графов (см., например, [2, 6]).

В настоящей статье впервые приводится полный список локальных предельных теорем (вместе с доказательствами) для суммы η_N при всех возможных значениях параметра τ. Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $N \to \infty, \tau > 2.$ Тогда

$$\sup_k \left| \sigma\sqrt{2\pi N}\, \mathbf{P}\{\eta_N = k\} - \exp\{-(k - N\zeta(\tau))^2/(2\sigma^2 N)\} \right| \to 0,$$

где

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\,\xi_1 = 2\zeta(\tau-1) - \zeta(\tau) - \zeta^2(\tau). \qquad (3)$$

Теорема 2. Пусть $N \to \infty, \tau = 2.$ Тогда

$$\sup_k \left| \sqrt{2\pi N \ln N}\, \mathbf{P}\{\eta_N = k\} - \exp\{-(k - N\zeta(\tau))^2/(2N\ln N)\} \right| \to 0.$$

Теорема 3. Пусть $N \to \infty, \tau \in (1,2).$ Тогда

$$\sup_k \left| N^{1/\tau}\, \mathbf{P}\{\eta_N = k\} - g((k - N\zeta(\tau))/N^{1/\tau}) \right| \to 0,$$

где $g(x)$ - плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\left\{ -\Gamma(1-\tau)|t|^{\tau}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi\tau}{2}\right)\cos\frac{\pi\tau}{2} \right\},$$

$\Gamma(x)$ – значение гамма-функции в точке x.

Теорема 4. Пусть $N \to \infty, \tau = 1.$ Тогда

$$\sup_k \left| N\, \mathbf{P}\{\eta_N = k\} - g((k - N\ln N)/N) \right| \to 0,$$

где $g(x)$ - плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\left\{ -\frac{\pi|t|}{2}\left(1 + \frac{2it\ln|t|}{\pi|t|}\right) \right\}.$$

Теорема 5. Пусть $N \to \infty, \tau \in (0,1).$ Тогда

$$\sup_k \left| N^{1/\tau}\, \mathbf{P}\{\eta_N = k\} - g(k/N^{1/\tau}) \right| \to 0,$$

где $g(x)$ - плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\left\{ -\Gamma(1-\tau)|t|^{\tau}\left(1 - \frac{it}{|t|}\tan\frac{\pi\tau}{2}\right)\cos\frac{\pi\tau}{2} \right\}.$$

Доказательства теорем 1-5. Из (1) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, k = 1,2,..., \quad (4)$$

откуда

$$\mathbf{E}\,\xi_1 = \zeta(\tau). \quad (5)$$

Если $\tau > 2$, то, в силу (2), (3) и (5), существуют $\mathbf{E}\,\xi_1$ и $\mathbf{D}\,\xi_1$, поэтому, как хорошо известно (см., например, [6]), для суммы η_N справедлива локальная предельная теорема о сходимости к нормальному закону, т.е. теорема 1.

Обозначим $F(x)$ общую функцию распределения случайных величин $\xi_1,...,\xi_N$. Из (1) и (4) получаем, что $F(x) = 0$ при $x \le 0$, а при

$x > 0$

$$F(x) = 1 - x^{-\tau} \quad \text{или} \quad F(x) = 1 - [x+1]^{-\tau} \quad (6)$$

для натуральных и нецелых x соответственно ($[x]$ означает целую часть числа x). Отсюда, из (2) - (4) и теоремы 2.6.2 [7] следует, что при $\tau = 2$ функция $F(x)$ принадлежит области притяжения нормального закона, хотя и не имеет математического ожидания. Используя теоремы 2.2.2 и 4.2.1 [7], получаем отсюда, что при $N \to \infty$

$$\sup_k \left| \sqrt{2\pi N h(N)}\, \mathbf{P}\{\eta_N = k\} - \exp\{-(k - N\zeta(\tau))^2 / (2Nh(N))\} \right| \to 0, \quad (7)$$

где $h(N)-$ медленно меняющаяся функция в смысле Карамата. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2 осталось уточнить вид функции $h(N)$. Из (4) следует, что характеристическая функция $\varphi(t)$ распределения (1) имеет вид:

$$\varphi(t) = 1 + (e^{it} - 1)\Phi(e^{it}, \tau, 1), \quad (8)$$

где

$$\Phi(z,s,a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s}$$

- трансцендентная функция Лерча [8]. Обозначим $\psi(t)$ характеристическую функцию суммы $(\eta_N - A_N)/B_N$, где величины A_N и B_N определены ниже. Тогда

$$\psi(t) = \exp\{-itA_N / B_N\}\varphi^N(t/B_N). \quad (9)$$

Отсюда и из (8) получаем, что

$$\ln\psi(t) = -itA_N / B_N + N\ln(1 + (e^{it/B_N} - 1)\Phi(e^{it/B_N}, \tau, 1)). \quad (10)$$

При $\tau = 2$ и $t \to 0$ асимптотика функции Лерча имеет вид [8]:

$$\Phi(e^{it}, 2, 1) = \zeta(2) - it(\zeta(2) + \ln(-it) - 3/2) - t^2\ln(-it) + O(t^2).$$

Используя это соотношение и разложение экспоненты и логарифма по

формуле Тэйлора, из (7)-(10) нетрудно получить, что при $A_N = N\zeta(\tau)$, $B_N = N\ln N$ и любом фиксированном t верно соотношение $\psi(t) \to \exp\{-t^2/2\}$, что и завершает доказательство теоремы 2.

Из (6) и теоремы 2.6.1 [7] следует, что при $\tau < 2$ закон распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем τ. В силу теорем 2.2.2 и 4.2.1 [7], при некотором выборе последовательности A_N справедливо соотношение

$$\sup_k \left| B_N\, \mathbf{P}\{\eta_N = k\} - g((k - A_N)/B_N) \right| \to 0,$$

где $B_N = N^{1/\tau}h(N)$, а $g(x)-$ плотность устойчивого закона с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\left\{ i\gamma t - c|t|^{\tau}\left(1 + i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t,\tau)\right)\right\}, \quad (11)$$

$\gamma, c, \beta -$ постоянные ($c \geq 0, |\beta| \leq 1$), а $\omega(t,\tau) = \tan(\pi\tau/2)$, если $\tau \neq 1$ и $\omega(t,1) = (2/\pi)\ln|t|$.

Пусть $\tau \in (1,2)$. При $t \to 0$ и $A_N = N\zeta(\tau)$ справедливо следующее представление [8]:

$$\Phi(e^{it}, \tau, 1) = \zeta(\tau)(1 - it) + \Gamma(1-\tau)(-it)^{\tau-1} + O(t).$$

Используя это равенство, (6), (8)-(11) и теорему 2.2.2 [7], можно, как и выше, найти с помощью непосредственных вычислений, что утверждение теоремы 3 верно при $N \to \infty$, $\gamma = 0$, $c = \Gamma(1-\tau)\cos(\pi\tau/2), \beta = 1$ и $h(N) = 1$.

Теоремы 4 и 5 доказываются аналогичным образом, при этом $\gamma = 0$, $A_N = N \ln N$ в теореме 4 и $A_N = 0$ в теореме 5, а асимптотические соотношения

для $\Phi(e^{it}, \tau, 1)$ при $\tau \in (0,1]$ и $t \to 0$ выглядят так [8]:

$$\Phi(e^{it}, 1, 1) = -(1-it)\ln(-it) - it/2 + O(t^2 \ln|t|),\ \Phi(e^{it}, \tau, 1) = \Gamma(1-\tau)(-it)^{\tau-1}(1 + o(1)).$$

Примечания:

1. Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos C. On power-law relationships of the Internet topology. // Computer Communication Rev. 1999. Vol. 29. P. 251-262.
2. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3-23.
3. Райгородский А.М. Модели случайных графов. Москва: МЦНМО, 2011. 134 с.
4. Павлов Ю.Л. Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа. // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 22-34.
5. Павлов Ю.Л. О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах. // Дискретная математика. 2009. Т. 21, вып. 3. С. 14-23.
6. Павлов Ю.Л. О типичной структуре конфигурационного Интернет-графа с известным число связей. //Труды Карельского научного центра Российской академии наук. 2011. № 5. С. 86-96.
7. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. Москва: Наука: 1965. 524 с.
8. Polylogarithm [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://en.wikipedia.org /wiki/ Polylogarithm (дата обращения: 11.02.2013).

УДК 519.175.4

Предельные распределения числа ребер случайного конфигурационного графа

[1] Юрий Леонидович Павлов
[2] Елена Валерьевна Феклистова

[1] Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Россия
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.
Доктор физико-математических наук, профессор.
E-mail: pavlov@krc.karelia.ru
[2] Петрозаводский государственный университет, Россия
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
Лаборант-исследователь
E-mail: f_len@mail.ru

Аннотация. Рассматривается случайный граф, построенный в виде конфигурационной модели со случайными независимыми степенями вершин, имеющими общий степенной закон распределения. При стремящемся к бесконечности числе вершин получено полное описание локального предельного поведения числа ребер.

Ключевые слова: случайный граф; конфигурационная модель; степень вершины; число ребер; локальные предельные теоремы.