UDC 517.977

On Control of an Ecological-Economic System Under Conditions of Incomplete Information *

Vyacheslav I. Maksimov

Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Russia
S.Kovalevskaya str. 16, Ekaterinburg 620990
Dr. (Mathematics), Professor
E-mail: maksimov@imm.uran.ru

Abstract. In the paper, a control problem for an ecological-economic system is considered. To solve this problem, an algorithm, which is stable with respect to informational noises, is designed.

Keywords: dynamical systems; control; incomplete information.

Введение. Управляемые динамические системы часто подвержены воздействию возмущений, законы изменения которых слабо предсказуемы, что является причиной дефицита информации. Теория управления в условиях неполной и меняющейся информации посвящена изучению таких случаев. Целью этой теории, в частности, является обеспечение заданного качества управления при любых допустимых возмущениях. Одним из типичных примеров задач указанной теории является задача реализации предписанного движения, суть которой состоит в построении алгоритмов формирования законов управления динамической системой, обеспечивающих заданное качество управляемого процесса. В случае, когда система не является полностью наблюдаемой, ключевой шаг в создании желаемых алгоритмов — это онлайн-реконструкция ненаблюдаемых компонент [1]. Задача, о которой идет речь в данной работе, характеризуется двумя особенностями. Во-первых, мы полагаем, что часть состояний системы измеряется неточно. Во-вторых, мы требуем, чтобы управления, необходимые для решения точной и приближенной задач, «мало» отличались. Для того чтобы этого добиться, мы используем технику динамического обращения в совокупности с техникой теории позиционных дифференциальных игр.

В качестве объекта исследований, на примере которого реализована описанная выше методика, взята динамическая модель, связывающая основные экономические и экологические показатели, предложенная в монографии [2]. Если от дискретной динамической системы, предлагаемой автором монографии, перейти к «непрерывной», то модель будет описываться системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
&\dot{T}(t) = c_1 T(t) + c_2 T_1(t) + 4.1 c_3 \log_2\left(1 + \frac{M_1(t)}{590}\right) + c_5 O(t), \quad t \in [0, \vartheta],\\
&\dot{T}_1(t) = c_4 (T - T_1),\\
&\dot{M}_1(t) = E_1(t)(1 - \mu(t)) - \delta_M M_1(t),\\
&\dot{K}(t) = -\delta_K K(t) + I(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $E_1(t) = E_1(t, K) = \beta\sigma(t) A(t) K(t)^{\gamma} L(t)^{1-\gamma}$, $O(t)$ — влияние внешних парниковых газов, $\mu(t)$ — снижение эмиссии по отношению к неконтролируемой эмиссии, $M_1(t)$ — избыток массы парниковых газов в атмосфере по сравнению с доиндустриальным периодом; $T(t)$ — средняя температура на поверхности Земли; $T_1(t)$ — средняя температура

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00110-а), а также программы приоритетных исследований Президиума РАН (проект 12-П-1-1038).

в глубине океана; $I(t)$ — глобальные инвестиции; $K(t)$— запас капитала, $L(t)$ – численность населения, $A(t)$ – уровень развития технологий, $\sigma(t)$ – отношение эмиссии парниковых газов к глобальному продукту. Роль управляющих параметров, законы формирования которых следует построить, играют функции $\mu(t)$ и $I(t)$. Полагаем, что начальное состояние Σ, $x(0)=\{T_0(0),T_1(0),M_1(0),K(0))\}$ предполагается известным, причем $T_0(0)>0,\quad T_1(0)>0,\quad K(0)>0.$ Символом $x(\cdot)=x(\cdot;x(0),u(\cdot))$ обозначим решение системы (1) с начальным состоянием $x(0)$ и управлением $u(\cdot)=\{\mu(\cdot),I(\cdot)\}.$

Обратимся к рассматриваемой задаче, суть которой состоит в следующем. Задана динамика системы, т.е. функция $x_*(\cdot)=\{T_{0*}(\cdot),T_{1*}(\cdot),K_*(\cdot),M_{1*}(\cdot)\}$, порождаемая некоторыми неизвестными управлениями $\mu=\mu_*(\cdot)$ и $I=I_*(\cdot)$. Таким образом, функции $x_*(\cdot)=\{T_{0*}(\cdot),T_{1*}(\cdot),K_*(\cdot),M_{1*}(\cdot)\}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\dot T_{0*}(t)=c_1T_{0*}(t)+c_2T_{1*}(t)+4.1c_3\log_2\left(1+\frac{M_{1*}(t)}{590}\right)+c_5O(t),$$

$$\dot T_{1*}(t)=c_4(T_{0*}(t)-T_{1*}(t)),$$

$$\dot M_{1*}(t)=E_{1*}(t,K_*)(1-\mu_*(t))-\delta_M M_{1*}(t),$$

$$\dot K_*(t)=-\delta_K K_*(t)+I_*(t),\quad t\in[0,\vartheta], \tag{2}$$

где, подчеркнем еще раз, функции $\mu_*(\cdot)$ и $I_*(\cdot)$ неизвестны. Известно лишь, что они стеснены ограничениями

$$I_*(t)\in[I_-,I_+],\quad \mu_*(t)\in[f_-,f_+]\quad \text{при}\quad t\in[0,\vartheta]. \tag{3}$$

Здесь $-\infty<f_-<f_+<+\infty$, $0\le I_-<I_+<+\infty$. Начальное состояние системы (2) — $x_*(0)=\{T_{0*}(0),T_{1*}(0),M_{1*}(0),K_*(0)\}$ — предполагается равным начальному состоянию системы (1), т.е. $x(0)$. В достаточно частые моменты $\tau_i\in\Delta=\{\tau_i\}_{i=0}^m,\quad \tau_{i+1}=\tau_i+\delta,\quad \tau_0=0,\quad \tau_m=\vartheta,$ измеряются (с ошибкой) $T_0(\tau_i)$, $T_1(\tau_i)$, и $K(\tau_i)$. Результаты измерений (векторы $\xi_i^h=\{\xi_{1i}^h,\xi_{2i}^h,\xi_{3i}^h\}\in R^3$) удовлетворяют неравенствам

$$|T_0(\tau_i)-\xi_{1i}^h|^2+|T_1(\tau_i)-\xi_{2i}^h|^2+|K(\tau_i)-\xi_{3i}^h|^2\le h^2, \tag{4}$$

где $h\in(0,1)$ величина информационной погрешности. Задано число $\varepsilon>0$. Необходимо указать алгоритм формирования (по принципу обратной связи) управления $u=u^h(t)=u(t;x^h(\cdot),x_*(\cdot),\xi^h(\cdot))$, обладающий следующим свойством. Каковы бы ни были измеримые по Лебегу функции $\mu_*(\cdot)$ и $I_*(\cdot)$ со свойствами (3), расстояние между $x^h(t)$ и $x_*(t)$ во все моменты времени $t\in[0,\vartheta]$ не должно превышать величины ε, если величины h и δ достаточно малы. Здесь $x^h(\cdot)=x(\cdot;u^h(\cdot))=\{T_0^h(\cdot),T_1^h(\cdot),M_1^h(\cdot),K^h(\cdot)\}$ — траектория системы (1), порожденная управлением $u(t)=u^h(t;x^h,x_*,\xi^h)=\left\{\mu^h(t)=\mu\left(t;x^h(\cdot),x_*(\cdot),\xi^h(\cdot)\right),I^h(t)=I(t;x^h,x_*,\xi^h(\cdot))\right\}$ $\in[f_-,f_+]\times[I_-,I_+]$, формируемым по принципу обратной связи.

Для построения управления u, решающего описанную задачу, наряду с поступающей информацией о изменении координат T_0, T_1 и K системы (1), необходима дополнительная информация о координате M_1. Для получения такой информации по ходу процесса функционирования системы естественно воспользоваться подходом из [1]. В этом случае вводится вспомогательная система M (называемая моделью) описываемая подходящим дифференциальным уравнением. Последнее имеет выход $w^h(t)$ и вход $v^h(t)$. Входом $v^h(\cdot)$ является некоторое вспомогательное управление; оно формируется по принципу обратной связи таким образом, чтобы $v^h(\cdot)$ "аппроксимировало" неизвестную координату $M_1(\cdot)$. Введем

Условие 1. $d_* = \inf\{\min\limits_{t\in[0,\vartheta]}\left(1+\dfrac{M_1(t)}{590}\right) : x(\cdot) = \{T_0(\cdot), T_1(\cdot), M_1(\cdot), K(\cdot)\} \in X(\cdot)\} > 1,$

где символ $X(\cdot)$ означает пучок всех решений системы (1).

Перейдем к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи. Итак, у нас имеется система (1) с управлением $u = \{\mu, I\}$, а также система (2) с неизвестным управлением $u_* = \{\mu_*, I_*\}$. Нами выбирается семейство

$$\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{h=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h), \quad \tau_{0,h} = 0, \quad \tau_{m_h,h} = \vartheta$$

разбиений интервала $[0,\vartheta]$ с шагом $\delta(h) = \tau_{i+1,h} - \tau_{i,h}$, а также функция $\alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$, зависящие от параметра h. Семейство Δ_h и функция $\alpha(h)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 2. Имеют место сходимости

$$\alpha(h) \to 0, \delta(h) \to 0, \delta(h)\alpha^{-1}(h) \to 0, h\alpha^{-1}(h) \to 0, \quad \alpha^{-1}(h)\delta^{\gamma}(h) \to +\infty$$

(при некотором $\gamma \in (0,1)$), если $h \to 0$.

В качестве модели M возьмем систему

$$\dot w^h(t) = f(\tau_i, \xi_i^h) + 4{,}1c_3 v^h(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{5}$$

$i \in [0 : m-1]$, $\tau_i = \tau_{i,h}$, $m = m_h$, с начальным условием $w^h(0) = T_0(0)$.

Здесь $f(\tau_i, \xi_i^h) = c_1\xi_{1i}^h + c_2\xi_{2i}^h + c_3 O(\tau_i)$.

До начала работы алгоритма фиксируется некоторая точность измерения h, а вместе с ней фиксируются разбиение $\Delta = \Delta_h$ и число $\alpha = \alpha(h)$. Работа алгоритма разбивается на $m-1$, $m = m_h$, однотипных шагов. В течение *i*-го шага, выполняемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{i,h}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, по состоянию модели (5) — $w^h(\tau_i)$, а также результату вычисления состояния системы (1) — вектору ξ_i^h, удовлетворяющему неравенству (4), вычисляются три числа — v_i^h и $u_i^h = \{\mu^h(\tau_i), I^h(\tau_i)\}$ — согласно формулам

$$v_i^h = -\frac{1}{\alpha}4{,}1c_3[w^h(\tau_i) - \xi_{1i}^h], \quad u_i^h = \{\mu^h(\tau_i), I^h(\tau_i)\} \quad \text{при} \quad t \in \delta_i.$$

где
$$I^h(\tau_i) = \operatorname{argmin}\{(\xi_{3i}^h - K_*(\tau_i))I : I \in [I_-, I_+]\},$$
$$\mu^h(\tau_i) = \operatorname{argmin}\{E_1(\tau_i, K_*)(u_*^h(\tau_i) - M_{1*}(\tau_i))\mu : \mu \in [f_-, f_+]\}.$$

$$u_*^h(\tau_i) = \begin{cases} \log_2\left(1 + \dfrac{M_{*1}(t)}{590}\right), & \text{если } \tau_i \le \delta^\gamma\ h \\ v_i^h, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Затем, в течение промежутка времени δ_i, на вход модели (5) подается постоянное управление $v^h(t) = v_i^h$, а на вход системы (1) – управление $u^h(t) = u_i^h$. После этого, в момент τ_{i+1} пересчитывается состояние модели (вместо числа $w^h(\tau_i)$ вычисляется число $w^h(\tau_{i+1}) = w^h(\tau_{i+1}; w^h(\tau_i), v_i^h)$), а также определяется вектор ξ_{i+1}^h. Аналогичные действия осуществляются до момента $\tau_{m_h-1,h}$.

Теорема. Пусть $0 < K_*(t)$ при $t \in [0,\vartheta]$ и выполнены условия 1, 2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $h_*(\varepsilon) \in (0,1)$ такое, что при всех $h \in (0, h_*(\varepsilon))$, $\delta(h) \in (0, \delta(h_*(\varepsilon)))$ имеет место неравенство $\max\limits_{t\in[0,\vartheta]} \left\| x^h(t) - x_*(t) \right\| \le \varepsilon$.

Как следует из теоремы, если фиксированная точность измерения h достаточно мала, то описанный выше алгоритм формирования управления $u(\cdot)$ в системе (1) обеспечивает “отслеживание” (в равномерной метрике) решением этой системы $x^h(\cdot)$ решение системы (2) $x_*(\cdot)$. Таким образом, алгоритм решает рассматриваемую задачу управления.

Примечания:

1. Осипов Ю.С. Методы динамического восстановления входов управляемых систем / Ю.С.Осипов, А.В.Кряжимский, В.И.Максимов. Екатеринбург: изд-во УрО РАН, 2011. с.292.
2. Nordhaus W.D. Managing the Global Commons. The Economics of Climate Change. MIT Press, 1994. p. 431.

УДК 517.977

Об управлении одной эколого-экономической системой в условиях неполной информации

Вячеслав Иванович Максимов

Институт математики и механики УрО РАН, Россия
г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16.
Доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: maksimov@imm.uran.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача управления эколого-экономической системой. Для решения этой задачи предлагается устойчивый к информационным помехам алгоритм.

Ключевые слова: динамические системы; управление; неполная информация.