01.00.00 Physico-mathematical sciences

01.00.00 Физико-математические науки

UDC 519.632

The Finite Element Method for Dirichlet Problem With Degeneration of Solution on the Boundary*

Elena I. Rukavishnikova

Computing Center of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Russia
Senior researcher, PhD (physical and mathematical), Assistant Professor
680000, Khabarovsk, Kim Yu Chen Street, 65
E-mail: vark0102@mail.ru

Abstract. Finite element method was created to solve the first-boundary-value problem for the second-order elliptic equation with degeneracy of input data, which solution has weak singularity on the curvilinear boundary of a two-dimensional convex domain. It has been determined that an approximate solution converges to the exact generalized solution in the norm of the Sobolev weighted space.

Keywords: finite element method; singularity of solution; Sobolev weighted space.

Введение. Краевые задачи с сингулярностью в решении возникают при математическом моделировании многих естественных процессов, например, в физике плазмы и газового разряда, электродинамике, ядерной физике, нелинейной оптике и других областях физики. Для краевых задач, имеющих особенности в решении в отдельных точках границы, были разработаны эффективные численные методы, позволяющие успешно и с хорошей точностью находить приближённые решения (см., напр., [1-8]).

В работах [9-11] С. М. Никольским и П. И. Лизоркиным были изучены коэрцитивные и дифференциальные свойства решений краевых задач с вырождением решения на всей границе области. В этой работе для решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением на всей границе двумерной области Ω построен метод конечных элементов, доказано, что приближённое решение сходится в весовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega)$ к обобщённому решению из класса $\overset{\circ}{W}{}^{2}_{2,\alpha-1}(\Omega)$.

Материалы и методы. Введём в рассмотрение некоторые обозначения и определения.

Пусть R^2 – двумерное евклидово пространство с $x=(x_1,x_2)$, $dx=dx_1dx_2$, $\Omega\subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ – замыкание области, т.е. $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, $\partial\Omega\in C^2$.

Введём весовое пространство С.Л. Соболева

$\overset{\circ}{W}{}^{s}_{2,\gamma}(\Omega)=\{u(x)\,|\,u(x)\in W^{s}_{2,\gamma}(\Omega), u(x)=0,\ x\in\partial\Omega\}$, $0<s+\gamma-\frac{1}{2}<s$, $s=1,2$, с конечной нормой

$$\|u\|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)}=\|u\|_{L_2(\Omega)}+|u|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)},$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00060-а, 11-01-98502-р_восток_а).

где $\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$, $|u|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \rho(x)^{-2\gamma} \sum\limits_{|\lambda|=s} \left(u^{(\lambda)}(x)\right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$, $u^{(\lambda)}(x) = \dfrac{\partial^{|\lambda|} u}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ – целые числа и $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$, $\rho(x)$ – расстояние от любой точки $x = (x_1, x_2)$ до границы $\partial\Omega$, γ – действительное число.

Определим класс $L_{2,-1-\gamma}(\Omega)$ функций $F(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\|F\|_{L_{2,-1-\gamma}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \left| F(x) \rho(x)^{1+\gamma} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$-\sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kl}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} \right) + a(x) u(x) = F(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

с граничным условием

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Предположим, что правая часть уравнения (1):

$$F(x) \in L_{2,-1-\alpha}(\Omega), \text{ т.е. } \rho(x)^{1+\alpha} F(x) \in L_2(\Omega), \tag{3}$$

$\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, коэффициенты уравнения $a_{kl}(x) = a_{lk}(x)$, $k, l = 1,2$ – функции, дифференцируемые на Ω, удовлетворяют неравенствам

$$|a_{kl}(x)| \leq C_0 \rho(x)^{-2\alpha}; \quad \left| \frac{\partial a_{kl}(x)}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial a_{kl}(x)}{\partial x_2} \right| \leq C_1 \rho(x)^{-2\alpha-1}, \tag{4}$$

функция $a(x)$ – положительная и подчиняется неравенству

$$|a(x)| \leq C_2 \rho(x)^{-2\alpha-2}, \tag{5}$$

где C_0, C_1, C_2, – константы, не зависящие от *x*, а также выполнено условие ультраэллиптичности

$$\sum_{k,l=1}^{2} a_{kl}(x) \xi_k \xi_l \geq \frac{\aleph}{\rho(x)^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{2} \xi_k^2, \quad x \in \Omega \tag{6}$$

с константой $\aleph > 0$, не зависящей от *x* и $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Задача (1), (2) равносильна следующей вариационной задаче [9]: найти функцию $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$E(u, v) = (F, v) \tag{7}$$

для любой функции $v(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

Здесь

$$(F, v) = \int\limits_{\Omega} F(x) v(x) dx,$$

$$E(u, v) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{k,l=1}^{2} a_{kl}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial v(x)}{\partial x_l} + a(x) u(x) v(x) \right) dx.$$

Отметим, что билинейная форма $E(u,v)$ непрерывна на $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega)$ – эллиптична, линейная форма (F,v) непрерывна на $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega)$.

В [9, 10] доказаны при сделанных предположениях (3)-(6) существование и единственность обобщённого решения задачи (1), (2) в классе $\overset{\circ}{W}{}^{2}_{2,\alpha-1}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega)$.

Построим схему метода конечных элементов (МКЭ). Полагая, что область определения решения $\overline{\Omega}$ выпуклая, произведём её триангуляцию τ_h. Для этого через точки, находящиеся от $\partial\Omega$ на расстояниях, равных $b\left(\frac{j}{n}\right)^r$, $j=0,\ldots,n$; $r>1$ ($b<\frac{\delta_\Omega}{2}, \delta_\Omega$ – диаметр вписанной в Ω окружности, r – параметр сжатия, характеризующий степень сгущения точек) проводятся кривые Γ_j, $j=0,\ldots,n$, разделяющие область Ω на слои Q_j, $j=1,\ldots,n$. Линия Γ_n при этом делит Ω на две подобласти: внутреннюю и внешнюю (приграничную полосу). На каждой кривой Γ_j $(j=0,\ldots,n)$, фиксируются M_j равноотстоящих узлов. Число M_j $(j=1,\ldots,n)$ определяется функцией $\psi(j)=\frac{l_j}{b\left(\frac{j}{n}\right)^r - b\left(\frac{j-1}{n}\right)^r}+1$, где l_j – длина j-той кривой, $M_0=2M_1$. Соединением сначала последовательно всех точек кривых Γ_j ломаными линиями, а затем каждого из узлов, принадлежащих Γ_{j-1}, с ближайшей из узловых точек кривой Γ_j $(j=1,\ldots,n)$ внешняя подобласть разбивается на элементы треугольного типа со сгущением к границе $\partial\Omega$. Во внутренней подобласти проводится квазиравномерная триангуляция, в результате которой имеем конечное число регулярных треугольников с наибольшей стороной порядка $\frac{1}{n}$.

Полученное, таким образом, разбиение области Ω на элементы удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\overline{\Omega}=\Omega^h \cup \Omega'$, где $\Omega^h=\bigcup\limits_{m=1}^{N} K_m$, N – число треугольных элементов, Ω' – объединение сегментов, отсекаемых треугольниками K_m, хотя бы одна вершина которых принадлежит границе $\partial\Omega$.

2. Общими для конечных элементов K_m являются только стороны или вершины.

3. Наибольшая сторона h в K_m имеет порядок $\frac{1}{n}$, где n – число слоёв в приграничной полосе.

4. $\sup\limits_{K\in\tau_h}\frac{h_{\max}(K)}{h_{\min}(K)} \le \sigma$, где σ не зависит от h.

Узловыми точками в τ_h являются вершины $T_0,\ldots,T_{N_h}$ треугольников K_m.

Заметим, что на основе изложенных принципов разработан алгоритм построения сеток со сгущением в приграничной полосе и создана программа [12].

Обозначим через $V^h \subset \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega)$ пространство непрерывных функций, линейных на каждом K_m из τ_h и равных нулю на $\overline{\Omega}\setminus\Omega^h$. Для функции $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^{2}_{2,\alpha-1}(\Omega)$ определим интерполянт $u_I(x)=\sum_{i=0}^{N_h} u(T_i)\varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)$ – базисная функция, равная в точке T_i единице, а в остальных узлах – нулю и линейная на каждом треугольнике K_m из τ_h.

Построенному конечномерному пространству $V^h \subset \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ сопоставим дискретную задачу: найти функцию $u_h(x)$ из V^h, удовлетворяющую равенству

$$E(u_h, v_h) = (F, v_h) \tag{8}$$

для любой функции $v_h(x)$ из V^h.

Здесь $E(u_h, v_h)$ и (F, v_h) – билинейная и линейная формы задачи (7). Из леммы Лакса-Мильграма [13] следует, что задача (8) имеет единственное решение $u_h(x)$, которое будем называть приближённым решением МКЭ.

Результаты. Исследуем вопрос о сходимости метода конечных элементов по норме $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 1. Если $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,\alpha-1}(\Omega)$, $u_I(x) \in V^h$ – интерполянт, построенный по проведённой триангуляции τ_h области Ω, то

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_I\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)} = 0.$$

На основании этой теоремы и неравенства

$$\|u - u_h\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)} \le C_3 \inf_{v_h \in V^h} \|u - v_h\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)}$$

с постоянной C_3, не зависящей от V^h, которое справедливо при наличии условий (4)-(6) на коэффициенты $a_{kl}(x) = a_{lk}(x)$ $(k, l = 1,2)$ и $a(x) > 0$ уравнения (1), устанавливается основной результат.

Теорема 2. Пусть коэффициенты $a_{kl}(x) = a_{lk}(x)$ $(k, l = 1,2)$ и $a(x) > 0$ удовлетворяют неравенствам (4)-(6), функция $F(x) \in L_{2,-1-\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тогда приближённое решение $u_h(x)$ МКЭ сходится при $h \to 0$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ к обобщённому решению $u(x)$ задачи (1), (2).

Примечания:

1. Рукавишников В.А. Коэрцитивная оценка скорости сходимости приближенного решения второй краевой задачи // ДАН СССР. 1983.Т. 271. № 4. С. 798-801.
2. Rukavishnikov V.A. The methods of numerical analysis for boundary value problems with strong singularity // Russ. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 2009. Vol. 24. № 6. P. 565-590.
3. Рукавишников В.А. О весовых оценках погрешности метода сеток решения уравнения Гельмгольца // Numerical Analysis and Mathematical Modelling. Banach Center Publications, PWN-Polish scientific publishers, Warsaw. 1990. Vol. 24. P. 397-408.
4. Rukavishnikov V.A. Study of difference schemes for Dirichlet's problem in Sobolev's weight space // Sib. J. Comput. Math. 1992. Vol. 1. No. 3. P. 191-204.
5. Assous F. Numerical solution of the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domain: The singular complement method /F. Assous, P. Ciarlet, Jr, J. Segré // J. Comp. Physics. 2000. Vol. 161. P. 218-249.
6. Costabel M. Exponential convergence of hp-FEM for Maxwell's equations with weighted

regularization in polygonal domains/ M. Costabel, M. Dauge, C. Schwab // Math. Models and Meth. in Appl. Sci. 2005. Vol. 15. P. 575-622.

7. Li H. Analysis of a modified Schrödinger operator in 2D: Regularity, index, and FEM / H. Li, V. Nistor // J. Comput. Appl. Math. 2009. Vol. 224. P. 320-338.

8. Rukavishnikov V.A. On differential properties R-generalized solution of the Dirichlet problem with coordinated degeneration of the input data // ISRN Mathematical Analysis. 2011. Vol. 2011. Article ID 243724, 18 pages, 2011. – doi:10.5402/2011/243724/.

9. Лизоркин П.И. Эллиптическое уравнение с вырождением. Вариационный метод / П.И. Лизоркин, С.М. Никольский // ДАН СССР. 1981. Т. 257. № 1. С. 42-45.

10. Лизоркин П.И. Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства решений/ П.И. Лизоркин, С.М. Никольский // ДАН СССР. 1981. Т. 257. № 2. С. 278-282.

11. Лизоркин П.И. Эллиптические уравнения с вырождением. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением/ П.И. Лизоркин, С.М. Никольский // ДАН СССР. 1981. Т. 259. № 1. С. 28-30.

12. Рукавишникова Е.И. Автоматизированное построение сетки со сгущением к границе области // Информатика и системы управления. 2011. №4(30). С. 57-64.

13. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.

УДК 519.632

Метод конечных элементов для задачи Дирихле с вырождением решения на границе

Елена Ивановна Рукавишникова

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Россия
старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент
680000, Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65
E-mail: vark0102@mail.ru

Аннотация. Для численного решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением исходных данных, решение которой имеет слабую сингулярность на криволинейной границе двумерной выпуклой области, построен метод конечных элементов. Установлено, что приближённое решение сходится к точному обобщённому решению в норме весового пространства Соболева.

Ключевые слова: Метод конечных элементов; сингулярность решения; весовое пространство Соболева.