05.00.00 Engineering science

05.00.00 Технические науки

UDC 648.23 (088.8)

The Qualitative Research Method of Dynamics Vibration of a Washing Machine Based on Riccati Equation

[1] Valery G. Fetisov
[2] Sergey N. Alekhin
[3] Sergey P. Petrosov

[1-3] South Mathematical Institute RAS, South Russian State Univ. of Economics and Service, Russia
346500, Shakhty, Shevchenko street, 147
[1] Dr. (Physical and Mathematical), Professor
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru
[2] PhD, Associate Professor
E-mail: alex_cn@mail.ru
[3] Dr. (Technical), Professor
E-mail: mabn@sssu.ru

Abstract. The accurate method for finding the common solutions of weakly interconnected system of nonhomogeneous differential equations with variable coefficients based on Riccati Equation was developed. This method describes the dynamics of vibration of the suspension drum type of a washing machine in spin mode.

Keywords. Dynamics vibration of washing machine; equation of Riccati; the system of differential equations with variable coefficients; qualitative method for finding exact solutions.

Введение. Тенденции и стратегия развития современной техники свидетельствуют о том, что качественные изменения машин и агрегатов достигаются, главным образом, за счёт форсирования скоростных и силовых параметров при одновременном снижении их материалоёмкости. Это обусловливает возрастание динамических нагрузок, механических воздействий и, как следствие, вибрационной активности машин и агрегатов.

Стиральные машины барабанного типа с неуравновешенным ротором, представляющие собой массовые и перспективные устройства для стирки и отжима текстильных изделий, являются одними из наиболее виброактивных агрегатов в сфере быта и коммунального хозяйства.

Динамика процесса вибраций подвесной части стиральной машины в первую очередь зависит от конструктивных особенностей, ее режимных параметров и таких факторов, как эксцентриситет центра масс текстильных изделий, загрузка машины, коэффициент загрузки барабана, режим отжима.

Изучение колебаний стиральных машин осуществлялось, как правило, без учёта влияния случайных воздействий на динамические характеристики машин, которое, как показали дальнейшие исследования, имеет существенное значение при проведении анализа колебательного процесса и разработке на его основе научно обоснованных рекомендаций по совершенствованию виброзащитных систем.

Высокая значимость поставленных проблем обусловливает актуальность и целесообразность исследования данного вопроса. Целью исследования является разработка точного (аналитического) метода нахождения общего решения системы неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающей динамику вибрации стиральных машин, на базе уравнения Риккати.

Материалы и методы. Методологической и теоретической основой исследования служат фундаментальные труды отечественных и зарубежных исследователей в области совершенствования математических моделей для стиральных машин, устройств и элементов виброизоляции, повышения комфортности и вибронадёжности рассматриваемых объектов.

Использовались специальные разделы математического и системного анализа, основы теории случайных процессов, численные методы статистической обработки экспериментальных данных, элементы и средства математического и физического моделирования.

Обсуждение. Ранее в диссертации [1] в матричной форме были составлены и решены уравнения колебаний неуравновешенного ротора подвесной части с горизонтальной осью его вращения. Задачи теории колебаний были решены в линейной постановке на основе уравнений Лагранжа II рода.

В монографии [2] была разработана и исследована математическая модель, описывающая процесс случайных колебаний подвесной части стиральной машины, в виде следующей динамической системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$
\begin{aligned}
&M_{п.ч}\ddot{\zeta} + N_\partial b_{\partial z}\cdot\dot{\zeta} + N_y c_{yz}\cdot\zeta = U_1(t)\cdot\omega^2\cdot\sin\omega t;\\
&J_z\cdot\ddot{\gamma} + N_\partial(b_{\partial y}\cdot\xi_1^2 + b_{\partial x}\cdot\eta_1^2)\cdot\dot{\gamma} + N_y(c_{yy}\cdot\xi_1^2 + c_{yx}\cdot\eta_1^2)\cdot\gamma = U_2(t)\cdot\omega^2\cdot l_x\cdot\cos\omega t;\\
&M_{п.ч}\ddot{\xi} + N_\partial b_{\partial x}\cdot\dot{\xi} + N_y\cdot c_{yx}\cdot\xi = 0;\\
&J_y\cdot\ddot{\beta} + N_\partial(b_{\partial x}\cdot\zeta_1^2 + b_{\partial z}\cdot\xi_1^2)\cdot\dot{\beta} + N_y(c_{yx}\cdot\zeta_1^2 + c_{yz}\cdot\xi_1^2)\cdot\beta = U_2(t)\cdot\omega^2\cdot l_x\cdot\sin\omega t;\\
&M_{п.ч}\ddot{\eta} + N_\partial b_{\partial y}\cdot\dot{\eta} + N_y\cdot c_{yy}\cdot\eta = U_1(t)\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t;\\
&J_x\cdot\ddot{\alpha} + N_\partial(b_{\partial z}\cdot\eta_1^2 + b_{\partial y}\cdot\zeta_1^2)\cdot\dot{\alpha} + N_y(c_{yz}\cdot\eta_1^2 + c_{yy}\cdot\zeta_1^2)\cdot\alpha = 0.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь: *M* – масса подвесной части, *N* – общее число демпферов и пружин, b_i – коэффициенты демпфирования, c_k – коэффициенты жесткости упругих элементов, $i,k=1,N$, l_x – величина перемещения центра масс текстильных изделий вдоль горизонтальной оси *Ox*, ω – частота колебаний вынуждающей силы, $U_1(t)$ и $U_2(t)$ – случайные процессы, отражающие внешние воздействия на подвесную часть, зависящие от массы загрузки барабана текстильными изделиями и возникающего эксцентриситета центра масс.

Первое, второе, четвертое и пятое уравнения исходной системы (1), описывающие процесс вынужденных колебаний подвесной части, являются однотипными уравнениями, общий вид которых следующий:

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = F(t), \qquad (2)$$

где *q* – обобщенная координата перемещения подвесной части стиральной машины; *F(t)* – внешнее воздействие на подвесную часть, зависящее от времени.

В данной работе предлагается точный (аналитический) метод для нахождения общего решения дифференциального уравнения (2) с переменными коэффициентами, который заключается в следующем.

С помощью замены переменной $\dot{q}(t)=u(t)\cdot q(t)$ приводим уравнение (2) к дифференциальному уравнению первого порядка относительно неизвестной функции $u(t)$, квадратично зависящего от функции $u(t)$ и имеющего следующий вид:

$$u'(t) + A(t)\cdot u^2(t) + B(t)\cdot u(t) + C(t) = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) в теории обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой уравнение Риккати (см. подробнее [3]).

Это уравнение можно записать в виде:

$$u'(t) = A_1(t)\cdot u^2(t) + A_2(t)\cdot u(t) + A_3(t), \qquad (4)$$

где $A_1(t) = -A(t)$; $A_2(t) = -B(t)$; $A_3(t) = -C(t)$ являются непрерывными (в некоторой области временного диапазона) функциями.

Отсюда: $u'(t) - A_2(t)\cdot u(t) = A_1(t)\cdot u^2(t) + A_3(t)$. (5)

Далее, обозначая $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, получим:

$$\left[u_1(t)+u_2(t)\right]' - A_2(t)\left[u_1(t)+u_2(t)\right] = A_1(t)\left[u_1(t)+u_2(t)\right]^2 + A_3(t),$$

или же

$$\left[u_1'(t)-A_2(t)u_1(t)\right]+\left[u_2'(t)-A_2(t)u_2(t)\right] = A_1(t)\cdot\left[u_1^2(t)+2u_1(t)u_2(t)+u_2^2(t)\right]+A_3(t). \quad (6)$$

Теперь уже можно найти функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ как частные решения соответствующих дифференциальных уравнений:

$$u_1'(t)-A_2(t)u_1(t)=A_1(t)u_1^2(t) \text{ и } u_2'(t)-A_2(t)u_2(t)=A_1u_2^2(t). \quad (7)$$

Заменяя $u_1(t)=x(t)z(t)$, получим $x'(t)z(t)+x(t)z(t)-A_2(t)u_1(t)=$ $=A_1(t)x^2(t)z^2(t)$. Полагаем $x(t)z'(t)-A_2(t)x(t)z(t)=0$; при $x(t)\neq 0$, $z(t)\neq 0$.

Разделяя переменные, получим: $z(t)=e^{\int A_2(t)dt}$ (где постоянная C=0); $x'(t)=A_1(t)\cdot x^2(t)z^2(t)$. Отсюда $x(t)=-(\int A_1(t)e^{\int A_2(t)dt}dt)$, а значит, решение

$$u_1(t)=-e^{+\int A_2(t)dt}\{\int A_1(t)e^{+\int A_2(t)dt}dt\}^{-1} \quad (8)$$

получено. Аналогично, находим решение $u_2(t)=x_1(t)z_1(t)$.

Отсюда:

$$u'_2(t)-A_2 z_1(t)x_1(t)=x'_1(t)z_1(t)+x_1(t)z'_1(t)-A_2(t)z_1(t)x_1(t)=A_1(t)x_1^2(t)z_1^2(t).$$

Полагая $x_1(t)z'_1(t)-A_2(t)z_1(t)x_1(t)=0$ и разделяя обе части на $x_1(t)\neq 0$, имеем $z'(t)=A_2(t)z_1(t)$. Далее $\dfrac{dz_1}{z_1}=A_2(t)$, $\ln|z_1(t)|=\int A_2(t)dt$, отсюда, $z_1(t)=e^{\int A_2(t)dt}$; (C_1=0).

Окончательно: $x_1'(t)=A_1(t)\cdot x_1^2(t)\cdot z_1(t)=A_1(t)e^{\int A_2(t)dt}x_1^2(t)$, и поэтому $x_1^{-2}(t)\cdot x'_1(t)=A_1(t)\cdot e^{\int A_2(t)dt}$, а, значит, $\dfrac{dx_1}{x_1^2}=A_1(t)\cdot e^{-\int A_2(t)dt}$

$$z_1x_1=-\{\int A_1(t)e^{\int A_2(t)dt}dt\}^{-1}e^{\int A_2(t)dt}. \quad (9)$$

Второе частное решение $u_2(t)$ также получено.

Следовательно:

$$2u_1(t)u_2(t)=2e^{2\int A_2(t)dt}\left\{\int A_1(t)e^{\int A_2(t)dt}dt\right\}^{-2}. \quad (10)$$

$$u^2(t)=\left[u_1(t)+u_2(t)\right]^2=4e^{2\int A_2(t)dt}\left\{\int A_1(t)\cdot e^{\int A_2(t)dt}dt\right\}^{-2}. \quad (11)$$

Итак:

$$u^2(t)=4u_1(t)u_2(t). \quad (12)$$

Учитывая теперь тождества (6), (10), (11), имеем:

$$u'(t)-A_2(t)u(t)=A_3(t)+2A_1(t)2e^{2\int A_2(t)dt}\left\{\int A_1(t)e^{\int A_2(t)dt}dt\right\}^{-2}. \quad (13)$$

Аналогично найдем теперь частное решение $u(t)$ (для уравнения (13)).

Полагаем $u(t)=p(t)r(t)$ и обозначим $S_0=2u_1u_2$.

Отсюда: $p'(t)r(t) - A_2(t)p(t)r(t) = A_3(t) + 2A_1(t)S_0$.

Аналогично предыдущему при $p(t) \neq 0$, $r(t) \neq 0$ найдем решения $p(t)$ и $r(t)$. Опуская промежуточные выкладки, окончательно получим результат:

$$u(t) \equiv e^{\int A_2(t)dt} \int \left[A_3(t) + 2A_1(t) 2e^{2\int A_2(t)dt} \{\int A_1(t) e^{\int A_2(t)dt} dt\}^{-2} \right] \cdot e^{-\int A_2(t)dt} dt, \quad (14)$$

представляющий собой частное решение дифференциального уравнения (13).

Учитывая $S_0 = 2u_1(t)u_2(t)$, краткая форма решения имеет следующий вид:

$$u(t) = e^{\int A_2(t)dt} \int \left[A_3(t) + 2A_1(t)S_0 \right] e^{-\int A_2(t)dt} dt. \quad (15)$$

Иными словами, это есть частное решение уравнение Риккати, выраженное в квадратурах. Аналогично можно получить общее решение исходного дифференциального уравнения Риккати, выраженное в квадратурах (в интегральной форме).

Опуская для краткости аналогичные промежуточные выкладки, запишем окончательное общее решение уравнения Риккати (4) в виде:

$$u(t) = e^{\int A_2(t)dt} \int \left[A_3(t) + 2A_1(t)S_0(t) \right] \cdot e^{-\int A_2(t)\partial t} dt -$$
$$- e^{\int [2A_2(t)u_1(t) + A_2(t)]\, dt} \left\{ \int A_1(t) e^{\int [2A_1(t)u_1(t) + A_2(t)]\, dt} dt + C \right\}^{-1}. \quad (16)$$

Возвращаясь к неоднородным, однотипным первому, второму, четвертому и пятому уравнениям исходной системы (1), имеющим переменные коэффициенты, получим:

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = F(t).$$

Сделав замену $\dot{q} = u(t)q(t)$, получим уравнение:

$$u'(t) + 2n(t) \cdot u(t) + k^2(t) - f(t) = 0. \quad (17)$$

Запишем уравнение (17) в следующей форме:

$$p'(t) = -p^2 - 2np - m;\ m = k^2(t);\ n = n(t). \quad (18)$$

Сравнивая с уравнением (4), заключаем, что $A_1(t) = -1$; $A_2(t) = -2n(t)$; $p(t) = u(t)$, $A_3(t) = -m(t) = -k^2(t)$.

Заменив $u_1(t)$ на p_1, а $u(t)$ на p, получим общее решение исходного дифференциального уравнения Риккати (4):

$$p(t) = p_1(t) + w(t) = -e^{-2\int n(t)dt} \int \left[k^2(t) + 2S_0 \right] e^{2\int n(t)dt} dt +$$
$$+ e^{-2\int [u_1(t) + n(t)]\, dt} \left\{ \int e^{-2\int [u_1(t) + n(t)]\, dt} dt + C \right\}^{-1}, \quad (19)$$

где $w(t) = e^{-2\int [u_1(t) + n(t)]\, dt} \left\{ \int e^{-2\int [u_1(t) + n(t)]\, dt} dt + C \right\}^{-1}$.

Если же дано общее неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее вид:

$$u''(t) + 2n(t) \cdot u'(t) + k^2(t) = f(t), \quad (20)$$

то его общее решение будет следующим:

$$U_{общ} = u_1(t) \cdot \left\{ \left[C_1(t) + C_1 \right] + \left[C_2(t) + C_2 \right] \int u_1^{-2}(t) e^{-2\int n(t)dt} dt \right\},$$

где функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ теперь уже известны, а $u_1(t) = -e^{-2\int n(t)dt} \cdot \int \left[k^2(t) + 2S_0 \right] \cdot e^{2\int n(t)dt} dt$.

Результаты и выводы. В данной работе предлагается точный (аналитический) метод нахождения общего решения дифференциального уравнения (2) с переменными коэффициентами, адекватного первому, второму, четвертому и пятому уравнениям исходной системы (1), описывающей процесс вынужденных колебаний подвесной части стиральной машины барабанного типа при отжиме. Вышеуказанный процесс изучен как при наличии детерминированных, так и случайных воздействий на подвесную часть стиральной машины, содержащей переменные конструктивные и режимные параметры. Основой разработанного метода служит уравнение Риккати.

Примечания:

1. Алехин С.Н. Теоретические и экспериментальные исследования динамики стиральных машин барабанного типа: дис. ...канд. техн. наук: 05.02.13. Москва, 2000. 290 с.
2. Исследование случайных воздействий на вибрационные характеристики стиральных машин барабанного типа при отжиме / В.Г. Фетисов, С.П. Петросов, С.Н. Алехин, И.В. Фетисов, И.И. Панина. Шахты : ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2012. 160 с.
3. Зеликин М.И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Изд-во «Факториал», 1998. 351 с.
4. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974. 287 с.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 408 с.
6. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
7. Lim H.T. Dynamic modeling and analysis of drum-type washing machine / H.T Lim // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2010. 11(3). P. 407–417.
8. Spelta C. Control of magnetorheological dampers for vibration reduction in a washing machine / C. Spelta // Journal of Mechatronics. 2009. № 19(3). P. 410–421.
9. Ryu Doo Young, Kim Ja Young. Drum type washing machine and balancer for drum type washing machine // Patent 7861560 Issued on January 4, 2011.

УДК 648.23 (088.8)

Качественный метод исследования динамики колебаний стиральной машины на основе уравнения Риккати

[1] Валерий Георгиевич Фетисов
[2] Сергей Николаевич Алехин
[3] Сергей Петрович Петросов

[1-3] Южный математический институт РАН, Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса, Россия
346500, г. Шахты, ул. Шевченко, 147
[1] Доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru
[2] Кандидат технических наук, доцент
E-mail: alex_cn@mail.ru
[3] Доктор технических наук, профессор
E-mail: mabn@sssu.ru

Аннотация. На основе уравнения Риккати разработан точный (аналитический) метод нахождения общего решения слабо связанной системы неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающей динамику вибрации подвесной части стиральной машины барабанного типа при отжиме.

Ключевые слова. Динамика вибрации стиральной машины; уравнение Риккати; система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами; качественный метод нахождения точного решения.