UDC 530.1

Principle extremum of full action

Solomon I. Khmelnik

Ha-Ela street 7/1, Beney-Ayish, 60860, Israel
PhD (Engineering Sciences)
E-mail: solik@netvision.net.il

ABSTRACT: A new variational principle extremum of full action is proposed, which extends the Lagrange formalism on dissipative systems. It is shown that this principle is applicable in electrical engineering, electrodynamics, mechanics and hydrodynamics, taking into account the friction forces. The proposed variational principle may be considered as a new formalism used as an universal method of physical equations derivation, and also as a method for solving these equations.
Keywords: variational principle, Lagrange formalism, action, dissipative systems, functional, saddle line, power.

Оглавление:

Введение

Здесь формулируется принцип экстремума полного действия, позволяющий конструировать функционал для различных физических систем и, что самое важное, для диссипативных систем. Первоначальный шаг в построении такого функционала состоит в том, что для некоторой физической системы записывается уравнение сохранения энергии или уравнение баланса мощностей. При этом учитываются и потери энергии (например, на трение или нагрев), и поток энергии в систему и из нее. Этот принцип здесь описывается в применении к электротехнике и механике.

1. Формулировка принципа

Широко известен лагранжев формализм – универсальный метод вывода физических уравнений из принципа наименьшего действия. При этом действие определяется как определенный интеграл - функционал

$$S(q)=\int_{t_1}^{t_2}\left(K(q)-P(q)\right)dt \qquad (1)$$

от разности кинетической $K(q)$ и потенциальной $P(q)$ энергий, называемой лагранжианом

$$\Lambda(q)=K(q)-P(q). \qquad (2)$$

Здесь интеграл берется на определенном интервале времени $t_1 \le t \le t_2$, а q - вектор обобщенных кординат, динамических переменных, которые, в свою очередь, зависят от времени. Принцип наименьшего действия утверждает, что экстремали этого функционала (т.е. уравнения, при которых он принимает минимальное значение) являются уравнениями реальных динамических переменных (т.е. реализуемых в действительности).

Например, если энергия системы зависит только от функций q и их производных от времени q', то экстремаль определяется по формуле Эйлера [1]

$$\frac{\partial (K-P)}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (K-P)}{\partial q'}\right)=0, \qquad (3)$$

В результате получаются уравнения Лагранжа.

Лагранжев формализм применим к тем системам, в которых сохраняется постоянной полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий). Он не отражает тот факт, что в реальных системах полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий) при движении убывает, переходя в другие виды энергии, например, в тепловую энергию Q, т. е. происходит диссипация энергии. Отсутствие для диссипативных систем (т.е. систем с рассеиванием энергии) формализма, аналогичного лагранжеву формализму, кажется странным: при этом физический мир оказывается разделенным на гармоничную (с принципом наименьшего действия) часть и на хаотичную ("беспринципгую") часть.

Автор предлагает **принцип экстремума полного действия**, применимого к диссипативным системам. <u>Полным действием</u> предлагается называть определенный интеграл - функционал

$$\Phi(q)=\int_{t_1}^{t_2}\Re(q)dt \qquad (4)$$

от величины

$$\Re(q)=\left(K(q)-P(q)-Q(q)\right), \qquad (5)$$

которую будем называть <u>энержианом</u> (по аналогии с лагранжианом). В нем $Q(q)$ - тепловая энергия. Далее рассматривается <u>квазиэкстремаль</u> полного действия, имеющая вид

$$\frac{\partial (K-P)}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (K-P)}{\partial q'}\right)-\frac{\partial Q}{\partial q}=0. \qquad (6)$$

Функционал (4) принимает (*определенное далее*) <u>экстремальное значение</u> на квазиэкстремалях. Принцип экстремального полного действия утверждает, что квазиэкстремали этого функционала являются уравнениями реальных динамических процессов.

Сразу же надо отметить, что экстремали функционала (4) совпадают с экстремалями (3) функционала (1) - член, соответствующий $Q(q)$, исчезает.

Определим экстремальное значение функционала (4, 5). Для этого "расщепим" (т.е. заменим) функцию $q(t)$ на две независимые функции $x(t)$ и $y(t)$, а функционалу (4) поставим в соответствие функционал

$$\Phi_2(x,y)=\int_{t_1}^{t_2}\Re_2(x,y)dt, \qquad (7)$$

который будем называть <u>"расщепленным" полным действием</u>. Функцию $\Re_2(x,y)$ будем называть <u>"расщепленным" энержианом</u>. Этот функционал минимизируется по функции $x(t)$ при фиксированной функции $y(t)$ и максимизируется по функции $y(t)$ при фиксированной функции $x(t)$. Минимум и максимум являются единственными. Таким образом, экстремум функционала (7) является седловой линией, где одна группа функций x_o минимизирует функционал, а другая y_o - максимизирует его. Сумма пары оптимальных значений расщепленных функций дает искомую функцию $q = x_o + y_o$, удовлетворяющую уравнению квазиэкстремали (6). Другими словами, квазиэкстремаль функционала (4) является суммой экстремалей x_o, y_o функционала (7), определяющих седловую точку этого функционала. Важно отметить, что эта точка является единственной экстремальной точкой – нет других седловых точек и нет других точек минимума или максимума. В этом заключается смысл выражения "экстремальное значение на квазиэкстремалях". Наше **утверждение 1** заключается в том, что

> в каждой области физики можно найти соответствие между полным действием и расщепленным полным действием, а тем самым доказать, что полное действие принимает глобальное экстремальное значение на квазиэкстремалях.

Рассмотрим правомерность этого утверждения 1 для некоторых областей физики.

2. Энержиан в электротехнике

Полное действие в электротехнике имеет вид (1.4, 1.5), где

$$K(q) = \frac{Lq'^2}{2}, \quad P(q) = \left(\frac{Sq^2}{2} - Eq \right), \quad Q(q) = Rq'q. \tag{1}$$

Здесь штрих обозначает производную, q - вектор функций-зарядов от времени, E - вектор функций-напряжений от времени, L - матрица индуктивностей и взаимоиндуктивностей, R - матрица сопротивлений, S - матрица обратных емкостей, а функции $K(q)$, $P(q)$, $Q(q)$ представляют магнитную, электрическую и тепловую энергии соответственно. Здесь и далее векторы и матрицы рассматриваются в смысле векторной алгебры, при этом операции с ними записываются в сокращенном виде. Так, произведение векторов представляет собой произведение вектора-столбца на вектор-строку, а квадратичная форма вида, например, $Rq'q$ представляет собой произведение вектора-строки q' на квадратную матрицу R и на вектор-столбец q.

Уравнение квазиэкстремали (1.6) в этом случае принимает вид

$$Sq + Lq'' + Rq' - E = 0. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (1.5), запишем энержиан (1.5) в развернутом виде:

$$\Re(q) = \left(\frac{Lq'^2}{2} - \frac{Sq^2}{2} + Eq - Rq'q \right). \tag{3}$$

Представим расщепленный энержиан в виде

$$\Re_2(x, y) = \left[\begin{array}{l} \left(Ly'^2 - Sy^2 + Ey - Rx'y \right) - \\ \left(Lx'^2 - Sx^2 + Ex - Rxy' \right) \end{array} \right]. \tag{4}$$

При этом экстремали интеграла (1.7) по функциям $x(t)$ и $y(t)$, найденные по уравнению Эйлера, примут соответственно вид:

$$2Sx + 2Lx'' + 2Ry' - E = 0, \qquad (5)$$
$$2Sy + 2Ly'' + 2Rx' - E = 0. \qquad (6)$$

Из симметрии уравнений (5, 6) следует, что оптимальные функции x_0 и y_0, удовлетворяющие этим уравнениям, удовлетворяют также условию

$$x_0 = y_0. \qquad (7)$$

Складывая уравнения (5) и (6), получаем уравнение (2), где

$$q = x_o + y_o. \qquad (8)$$

Следовательно, уравнение (2) является необходимым условием существования седловой линии. В [2, 3] показано, что достаточным условием для существования единственной седловой линии является знакоопределенность матрицы L, что выполняется в любой электрической цепи.

Таким образом, утверждение 1 для электротехники доказано. Из этого следует также, **утверждение 2**:

> любой физический процесс, описываемый уравнением вида (2), удовлетворяет принципу экстремума общего действия.

Заметим, что уравнение (2) является уравнением электрической цепи без узлов. Однако в [2, 3] показано, что к подобному виду можно привести уравнение любой электрической цепи (с любой степенью точности).

3. Энержиан в механике

Здесь рассмотрим только один пример - прямолинейное движение тела массой m под действием движущей силы f и силы торможения kq', где k - известный коэффициент, q - координата тела. Известно, что

$$f = mq'' + kq'. \qquad (1)$$

В этом случае кинетическая, потенциальная и тепловая энергии имеют соответственно вид:

$$K(q) = mq'^2/2, \quad P(q) = -fq, \quad Q(q) = kqq'. \qquad (2)$$

Запишем энержиан (1.5) для этого случая:

$$\Re(q) = mq'^2/2 + fq - kqq'. \qquad (3)$$

Уравнение квазиэкстремали в этом случае принимает вид (1).

Представим расщепленный энержиан в виде

$$\Re_2(x, y) = \begin{bmatrix} \left(my'^2 + fy - kx'y\right) \\ \left(mx'^2 + fx - kxy'\right) \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Можно заметить аналогию между энержианами для электротехники и для этого примера, откуда следует, что утверждение 1 для этого примера доказано. Впрочем, это же непосредственно следует из утверждения 2.

4. Математическое отступление

Введем следующие обозначения:

$$y' = dy/dt, \quad \breve{y} = \int_0^t y\,dt. \qquad (1)$$

Известна формула Эйлера-Пуассона для вариации функционала от функции $f(y, y', y'', ...)$ [1]. По аналогии запишем такую же формулу для функции

$$f(..., \breve{y}, y, y', y'', ...): \qquad (2)$$

$$\mathrm{var} = \ldots - \int_0^t f'_{\text{€}} dt + f'_y - \frac{d}{dt} f'_{y'} + \frac{d^2}{dt^2} f'_{y''} - \ldots \qquad (3)$$

В частности, если $f() = xy'$, то $\mathrm{var} = -x'$; если $f() = x\text{€}$, то $\mathrm{var} = -\text{€}$. Равенство нулю вариации (1) является необходимым условием экстремума функционала от функции (2).

5. Действие для мощностей

В дальнейшем будем говорить о мощности энергии (кинетической, потенциальной, тепловой) как об изменеии этой энергии в единицу времени. Будем рассматривать эти мощности, как функции <u>интегральных обобщенных координат</u> $\text{€} = q$ - интегралов i от обобщенных координат q. Будем обозначать эти мощности как $K\text{€}(i),\ P\text{€}(i),\ Q\text{€}(i)$. Важно отметить следующее. Функции энергии в качестве аргументов содержат обобщенные коорлинаты q и их производные $q',\ q''$. Функции мощности в качестве аргументов содержат интегральные обобщенные коорлинаты i, их производные i' и их интегралы €.

Рассмотрим <u>действие-2</u> для мощностей и определим его как определенный интеграл - функционал

$$S\text{€}(i) = \int_{t_1}^{t_2} \left(K\text{€}(i) + P\text{€}(i) \right) dt \qquad (1)$$

от суммы кинетической и потенциальной мощностей

$$\Lambda\text{€}(i) = K\text{€}(i) + P\text{€}(i). \qquad (2)$$

и назовем эту сумму <u>лагранжианом-2</u>.

Принцип наименьшего действия можно распространить и на <u>действие-2</u>, т.е. утверждать, что экстремали функционала (1) являются уравнениями реальных динамических процессов относительно <u>интегральных обобщенных координат</u>. что квазиэкстремали. Однако экстремали при этом должны вычислятся по формуле (4.3).

Пример 1. Рассмотрим пример из раздела 3, для которого применимо уравнение (3.1) или, при отсутствии тепловых потерь,

$$f = m \cdot i'. \qquad (3)$$

В этом случае кинетическая и потенциальная мощности имеют соответственно вид:

$$K\text{€}(i) = m \cdot i \cdot i',\quad P\text{€}(i) = -f \cdot i. \qquad (4)$$

Запишем лагранжиан-2 (2) для этого случая:

$$\Re\text{€}(i) = m \cdot i \cdot i' - f \cdot i. \qquad (5)$$

Уравнение экстремали для функционала (1) в этом случае совпадает с уравнением (3).

Пример 2. Рассмотрим еще пример из раздела 2, для которого применимо уравнение (2.2) или, при отсутствии тепловых потерь,

$$S\text{€} + Li' - E = 0. \qquad (6)$$

В этом случае кинетическая и потенциальная мощности имеют соответственно вид:

$$K\text{€}(i) = L \cdot i \cdot i',\quad P\text{€}(i) = S \cdot \text{€} \cdot i - E \cdot i. \qquad (7)$$

Запишем лагранжиан-2 (2) для этого случая:

$$\Re(i) = L \cdot i \cdot i' + S \cdot \dot{E} \cdot i - E \cdot i. \qquad (8)$$

Уравнение экстремали для функционала (1) в этом случае может быть получено по формуле (4.3) и совпадает с уравнением (6).

6. Полное действие для мощностей

В данном случае полное действие-2 является определенным интегралом - функционалом

$$\dot{\Phi}(i) = \int_{t_1}^{t_2} \Re(i)dt \qquad (1)$$

от величины

$$\Re(i) = \left(\dot{K}(i) + \dot{P}(i) + \dot{Q}(i)\right), \qquad (2)$$

которую будем называть энержианом-2. В этом случае квазиэкстремаль полного действия-2 определим как

$$\frac{\partial\left(\frac{\dot{Q}}{2} + \dot{P} + \dot{K}\right)}{\partial i} = 0. \qquad (3)$$

Функционал (1) принимает экстремальное значение на этих квазиэкстремалях. **Принцип экстремума полного действия-2** утверждает, что квазиэкстремали этого функционала являются уравнениями реальных динамических процессов относительно интегральных обобщенных координат i.

Определим экстремальное значение функционала (1, 2). Для этого, как и ранее, "расщепим" функцию $i(t)$ на две независимые функции $x(t)$ и $y(t)$, а функционалу (1) поставим в соответствие функционал

$$\dot{\Phi}_2(x, y) = \int_{t_1}^{t_2} \Re_2(x, y)dt, \qquad (4)$$

который будем называть "расщепленным" полным действием-2. Функцию $\Re_2(x, y)$ будем называть "расщепленным" энержианом-2. Этот функционал минимизируется по функции $x(t)$ при фиксированной функции $y(t)$ и максимизируется по функции $y(t)$ при фиксированной функции $x(t)$. Как и ранее, квазиэкстремаль (3) функционала (1) является суммой $i = x_o + y_o$ экстремалей x_o, y_o функционала (4), определяющих седловую точку этого функционала.

7. Энержиан-2 в механике

Как и в разделе 3 рассмотрим пример, для которого применимо уравнение (3.1) или

$$f = m \cdot i' + k \cdot i. \qquad (1)$$

В этом случае кинетическая, потенциальная и тепловая мощности имеют соответственно вид:

$$\dot{K}(i) = m \cdot i \cdot i', \quad \dot{P}(i) = -f \cdot i, \quad \dot{Q}(q) = k \cdot i^2. \qquad (2)$$

Запишем энержиан-2 (6.2) для этого случая:

$$\Re(i) = m \cdot i \cdot i' - f \cdot i + \frac{1}{2} k \cdot i^2. \qquad (3)$$

Уравнение квазиэкстремали в этом случае принимает вид (1).

8. Энержиан-2 в электротехнике

Рассмотрим электрическую цепь, уравнение которой имеет вид (2.2) или

$$S\cdot q+L\cdot i'+R\cdot i-E=0\,. \qquad (1)$$

В такой цепи кинетическая, потенциальная и тепловая мощности имеют соответственно вид:

$$K(i)=L\cdot i\cdot i',\;\; P(i)=S\cdot q\cdot i-E\cdot i,\;\; Q(i)=R\cdot i^2. \qquad (2)$$

Запишем энержиан-2 (6.2) для этого случая:

$$\Re(i)=L\cdot i\cdot i'+S\cdot q\cdot i-E\cdot i+\frac{1}{2}R\cdot i^2. \qquad (3)$$

Уравнение квазиэкстремали в этом случае принимает вид (1).

Представим теперь расщепленный энержиан-2 в виде

$$\Re_2(x,y)=\begin{bmatrix} S\left(x\bar{y}-\bar{x}y\right)+L\left(xy'-x'y\right)+ \\ +R\left(x^2-y^2\right)-E\left(x-y\right) \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

При этом экстремали интеграла (6.4) по функциям $x(t)$ и $y(t)$, найденные по уравнению (4.3), примут соответственно вид:

$$2S\bar{y}+2Ly'+2Rx-E=0\,, \qquad (5)$$

$$2S\bar{x}+2Lx'+2Ry-E=0\,. \qquad (6)$$

Из симметрии уравнений (5, 6) следует, что оптимальные функции x_0 и y_0, удовлетворяющие этим уравнениям, удовлетворяют также условию

$$x_0=y_0\,. \qquad (7)$$

Складывая уравнения (5) и (6), получаем уравнение (1), где

$$q=x_o+y_o\,. \qquad (8)$$

Следовательно, уравнение (1) является необходимым условием существования седловой линии. В [2, 3] показано, что достаточным условием для существования единственной седловой линии является знакоопределенность матрицы L, что выполняется в любой электрической цепи.

Заключение

Функционалы (1.7) и (6.4) имеет глобальную седловую линию и поэтому для расчета физических систем с таким функционалом можно применить метод градиентного спуска к седловой точке. Поскольку глобальный экстремум существует, то и решение существует всегда. Такой метод в применении к электротехнике и электромеханике описан в [2, 3].

Автор применил принцип экстремума полного действия для мощностей, а также указанный и метод расчета, к электродинамике [2, 3] и гидродинамике [4, 5],

Примечания:

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Эдиториал УРСС, Москва, 2000.

2. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, третья редакция. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875. Россия-Израиль, 2010, ISBN 978-0-557-4837-3.

3. Khmelnik S.I. Variational Principle of Extremum in electromechanical and electrodynamic Systems, second edition. Published by “MiC” - Mathematics in Computer Comp., printed in USA, printed in USA, Lulu Inc. ID 1142842. Israel-Russia, 2010, ISBN 978-0-557-08231-5.

4. Хмельник С.И. Уравнения Навье-Стокса. Существование и метод поиска глобального решения, вторая редакция. Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp., printed in USA, Lulu Inc., ID 9971440. Израиль, 2010, ISBN 978-1-4583-1953-1.

5. Khmelnik S.I. Navier-Stokes equations. On the existence and the search method for global solutions, second edition. Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp., printed in USA, printed in USA, Lulu Inc. ID 9976854. Israel, 2011, ISBN 978-1-4583-2400-9.

УДК 530.1

Принцип экстремума полного действия

Соломон Ицкович Хмельник

Бней-Айш, Израиль
Ha-Ela street 7/1, Bene-Ayish, 60860, Israel
Кандидат технических наук
E-mail: solik@netvision.net.il

АННОТАЦИЯ: Предлагается новый вариационный принцип экстремума полного действия, который расширяет Лагранжев формализм на диссипативные системы. Указывается, что этот принцип применим в электротехнике, электродинамике, механике и гидродинамике с учетом сил трения. Предлагаемый вариационный принцип может рассматриваться как новый формализм универсального метода вывода физических уравнений, а также как метод решения этих уравнений.

Ключевые слова: вариационный принцип, лагранжев формализм, действие, диссипативные системы, функционал, седловая линия, энергия.