UDC 519.21

WAITING TIME IN THE ELEMENTARY MULTICHANNEL QUEUE SYSTEM WITH DIFFERENT INTENSITY SERVICE OF CALLS AND WITH EXPECTATION

[1]Arsen R. Simonyan
[2]Rafik A. Simonyan
[3]Elena I. Ulitina

[1]Sochi State University for Tourism and Recreation
Sovetskaya street 26a, Sochi city, Krasnodar Krai, 354000, Russia
PhD (Physics and mathematical), associate professor
E-mail: oppm@mail.ru
[2]Kuban State University
Stavropolskaya st. 149, Krasnodar, 350040, Russia
Student of the 5th year
E-mail: raf55@list.ru
[3]Sochi State University for Tourism and Recreation
Sovetskaya street 26a, Sochi city, Krasnodar Krai, 354000, Russia
PhD (Physics and mathematical), associate professor
E-mail: ulitinaelena@mail.ru

In article the multichannel queue system with several serving devices (channels), with poissonian entering stream of calls and with exponentially distribution function durations service of calls is analyzed. Unlike existing works, in given article for the first time it is supposed that each device has the parameter of service distinct from the others. For this system of mass service, in conditions stability, likelihood characteristics of waiting time are received.

Keywords: poisson stream, queue theory, waiting time.

Одной из первых систем массового обслуживания, позволивших свое изучение методами процессов размножения и гибели [1], является система M|M|m|∞, что по терминологии Кендалла-Башарина [1] означает: в m – канальную систему массового обслуживания с ожиданием поступает пуассоновский поток вызовов с параметром $\lambda > 0$, а длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и имеют экспоненциальную функцию распределения: $1 - exp\{-\mu t\}, \mu > 0, t > 0$.

В момент $t = 0$ система свободна от вызовов.

Поступивший первый вызов немедленно начинает свое обслуживание. Следующий поступивший вызов начинает обслуживание следующим прибором и так далее. Когда в момент поступления вызовов все приборы заняты, то поступившие вызовы становятся в очередь и ждут своего обслуживания в порядке поступления (FIFO).

Рассмотрим систему M|M|↓m|∞, которая от системы M|M|m|∞ отличается тем, что каждый прибор (канал) нумеруется и прибор с номером k $(k = 1,2, \dots, m)$ имеет свою интенсивность $\mu_k > 0$ обслуживания вызовов.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что в момент t в системе находятся k вызовов $k = 1,2, \dots$.

Нас интересуют стационарные вероятности

$p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t), k = 1,2,\dots$. (1)

Существование этих пределов следует из теоремы Феллера [3].

Применяя аппарат процессов размножения и гибели (см. [1] , [2] и [4]) получим следующие уравнения

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu_1 p_1 = 0, \\ \lambda p_{k-1} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{k} \mu_i\right) p_k + p_{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i = 0 \text{ при } 1 \le k < m, \\ \lambda p_{k-1} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{m} \mu_i\right) p_k + p_{k+1} \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 0 \text{ при } k \ge m. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим $\overline{\mu_k} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$, тогда из (2) получаем

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \overline{\mu_1} p_1 = 0, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + \overline{\mu_k}) p_k + p_{k+1} \overline{\mu_{k+1}} = 0 \text{ при } 1 \le k < m, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + \overline{\mu_m}) p_k + p_{k+1} \overline{\mu_m} = 0 \text{ при } k \ge m. \end{cases} \quad (3)$$

Добавляя к (3) условие

$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ (4)

и применяя обозначения

$$\begin{cases} z_k = \lambda p_{k-1} - \overline{\mu_k} p_k \quad \text{при } 1 \le k < m, \\ z_k = \lambda p_{k-1} - \overline{\mu_m} p_k \quad \text{при } k \ge m, \end{cases} \quad (5)$$

Из (3) и (5) получаем

$z_1 = z_2 = \dots = z_k = 0$, (6)

для любого $k = 1,2,\dots$.

Обозначим через $\rho_k = \frac{\lambda}{\overline{\mu_k}}, k = 1,2,\dots m$ и пусть $\rho = \rho_m$ - загрузка системы, тогда из (4) и (6) получаем решение системы (3):

$$\begin{cases} p_k = \prod_{i=0}^{k} \rho_i \; p_0 \quad \text{при } 1 \le k < m, \\ p_k = \rho^{k-m} \cdot \prod_{i=0}^{m} \rho_i \, p_0 \quad \text{при } k \ge m, \end{cases} \quad (7)$$

где $p_0 = \left(\sum_{k=0}^{m} \prod_{i=0}^{k} \rho_i + \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \prod_{i=0}^{m} \rho_i \right)^{-1}, \quad \rho_0 = 1.$

Пределы (1) и решения (7) существуют в стационарном режиме работы системы, т.е. при $\rho < 1$.

Обозначим через π вероятность того, что все приборы будут заняты в какой-то случайно взятый момент времени, тогда очевидно, что

$\pi = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = \frac{\prod_{i=0}^{m} \rho_i}{1-\rho} p_0$. (8)

Основной характеристикой качества обслуживания является длительность ожидания вызовом начала обслуживания – время ожидания.

Время ожидания является случайной величиной, которую обозначим через w. Пусть теперь $W(t) = P\{w \le t\}$ – функция распределения времени ожидания. Для $W(t)$ имеет место следующая теорема.

Теорема. В модели M|M|↓m|∞ при $\rho < 1$, для $W(t)$ имеет место формула

$$W(t) = \begin{cases} 1 - \pi e^{-\lambda\left(\frac{1}{\rho}-1\right)t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Доказательство. Обозначим $\overline{W}(t) = 1 - W(t) = P\{w > t\}$ вероятность того, что время ожидания превзойдет t, а через $\overline{W_k}(t)$ условную вероятность того, что время ожидания превзойдет t, при условии, что в момент поступления вызова, для которого мы подсчитываем время ожидания, в системе уже находится k вызовов. Согласно формуле полной вероятности

$$\overline{W}(t) = \sum_{k=m}^{\infty} p_k \overline{W_k}(t). \quad (10)$$

Прежде чем преобразовать эту формулу к удобному виду, приготовим некоторые необходимые сведения.

Обозначим через $q_j(t)$ вероятность того, что за промежуток времени длиной t после поступления интересующего нас вызова, закончилось обслуживание ровно j вызовов. Очевидно, что при $k \geq m$ имеет место равенство [1]

$$\overline{W_k}(t) = \sum_{j=0}^{k-m} q_j(t). \quad (11)$$

Так как распределение длительностей обслуживания вызовов имеет показательное распределение и не зависит от количества вызовов в очереди и их длительностей обслуживания, то

$$q_0(t) = e^{-\overline{\mu_m} t}.$$

Если все приборы заняты обслуживанием и еще имеется очередь вызовов, которые ожидают обслуживания, то поток обслуженных вызовов будет пуассоновским с интенсивностью $\overline{\mu_m} > 0$ и следовательно

$$q_j(t) = e^{-\overline{\mu_m} t} \frac{(\overline{\mu_m} t)^j}{j!}. \quad (12)$$

Подставляя в (11) значение (12), а полученное в (10) и пользуясь формулой (7) получаем

$$\overline{W}(t) = p_m e^{-\overline{\mu_m} t} \sum_{k=m}^{\infty} \rho^{k-m} \sum_{j=0}^{k-m} \frac{(\overline{\mu_m} t)^j}{j!} =$$

$$= p_m e^{-\overline{\mu_m} t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\overline{\mu_m} t)^j}{j!} \sum_{k=m+j}^{\infty} \rho^{k-m} =$$

$$= p_m e^{-\overline{\mu_m} t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \sum_{k=m+j}^{\infty} \rho^{k-m-j} =$$

$$= \frac{p_m}{1-\rho} e^{-\overline{\mu_m} t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \frac{p_m}{1-\rho} e^{-(\overline{\mu_m} - \lambda)t}.$$

Из формул (7) и (8) следует, что $p_m = \pi(1-\rho)$, поэтому при $t > 0$

$$\overline{W}(t) = \pi e^{-(\overline{\mu_m} - \lambda)t},$$

но поскольку $\overline{\mu_m} = \frac{\lambda}{\rho}$, то получаем

$$\overline{W}(t) = \pi e^{-\lambda\left(\frac{1}{\rho}-1\right)t}. \quad (13)$$

Теорема доказана.

Формула (13) позволяет найти все числовые характеристики времени ожидания. В частности среднее время ожидания равно

$$w_1 = Mw = -\int_0^{+\infty} t d\,\overline{W}(t) = \pi \int_0^{+\infty} t\lambda\left(\frac{1}{\rho} - 1\right) e^{-\lambda\left(\frac{1}{\rho}-1\right)t} dt\,.$$

Несложные вычисления приводят к формуле

$$w_1 = \frac{\pi\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Примечания:

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. С. 336.
2. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее применения. М.: Советское радио, 1965. С. 520.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2. С. 751.
4. Симонян А.Р., Симонян Р.А., Улитина Е.И. Длина очереди в простейшей многоканальной системе массового обслуживания с монотонными интенсивностями и с ожиданием // Вестник СГУТиКД. 2010. №4. С. 60-65.

УДК 519.21

ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ В ПРОСТЕЙШЕЙ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С МОНОТОННЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ВЫЗОВОВ И С ОЖИДАНИЕМ

[1] Арсен Рафикович Симонян
[2] Рафик Арсенович Симонян
[3] Елена Ивановна Улитина

[1] Сочинский государственный университет туризма и курортного дела
354003, Россия, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а
кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: oppm@mail.ru
[2] Кубанский государственный университет
350040, Россия, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149
студент 5-го курса
E-mail: raf55@list.ru
[3] Сочинский государственный университет туризма и курортного дела
354003, Россия, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а
кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: ulitinaelena@mail.ru

В статье рассматривается многоканальная система массового обслуживания с несколькими обслуживающими приборами (каналами), с пуассоновским входящим потоком вызовов и с экспоненциальной функцией распределения длительностей обслуживания вызовов. В отличие от существующих работ, в данной статье впервые предполагается, что каждый прибор имеет свой параметр обслуживания отличный от остальных. Для этой системы массового обслуживания, в условиях стационарности, получены вероятностные характеристики времен ожидания.

Ключевые слова: Пуассоновский поток, теория массового обслуживания, время ожидания.